Miguel Chaquiam
Natanael Freitas Cabral

FUNÇÕES: USO, DESUSO E REFLEXOS SOBRE O ENSINO

ʃINEPEM

SIMPÓSIO NACIONAL SOBRE O ENSINO E PESQUISA DA MATEMÁTICA NO CONTEXTO DA EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Coordenadores
Raimundo Otoni Melo Figueiredo
Reginaldo da Silva

Belém - Pará
2019

Miguel Chaquiam – Natanael Freitas Cabral

MIGUEL CHAQUIAM
NATANAEL FREITAS CABRAL

FUNÇÕES
uso, desuso e reflexos no ensino

ORGANIZADORES

Demetrius Gonçalves de Araújo

Raimundo Otoni Melo Figueiredo

Reginaldo da Silva

BELÉM – PARÁ
Maio de 2019

Coordenação I SINEPEM	Demetrius Gonçalves de Araújo Raimundo Otoni Melo Figueiredo Reginaldo da Silva
Comitê Científico Coleção I	Demetrius Gonçalves de Araújo Glauco Lira Pereira Miguel Chaquiam Raimundo Otoni Melo Figueiredo Reginaldo da Silva

Revisão de Texto e Bibliográfica: Os autores
Capa e Projeto Gráfico: Demetrius Gonçalves de Araújo e Miguel Chaquiam

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Belém – Pará – Brasil

Chaquiam, Miguel
Funções: uso desuso e reflexos no ensino / Miguel Chaquiam; Natanael Freitas Cabral. Coordenado por Demetrius Gonçalves de Araújo, Raimundo Otoni Melo Figueiredo e Reginaldo da Silva. Belém: SINEPEM, 2019. (Coleção I).

68 p.

ISBN 978-85-62855-95-5 (V. 4)
ISBN 978-85-62855-87-0 (Coleção)

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Matemática - Formação profissional. 3. Funções I. Cabral, Natanael Freitas. II. Título. III. Coleção. I. IFPA.

CDD 510.7

Índices para catalogo sistemático:
1. Matemática: Estudo e ensino 510.7

SIMPÓSIO NACIONAL SOBRE O ENSINO E PESQUISA DE MATEMÁTICA NO CONTEXTO DA EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Diretoria Regional da SBEM-PA

Diretora:	FERNANDO CARDOSO DE MATOS
Vice-Diretora:	REGINALDO DA SILVA
1º. Secretário:	JOSÉ CARLOS DE SOUZA PEREIRA
2º. Secretário:	JOSÉ MESSILDO VIANA NUNES
3º. Secretário:	DEMETRIUS GONÇALVES DE ARAÚJO
3º. Secretário:	NATANAEL FREITAS CABRAL
1º. Tesoureiro:	ACYLENA COELHO COSTA
2º. Tesoureiro:	MARIA ALICE DE VASCONCELOS FEIO MESSIAS

Comissão Organizadora SINEPEM

ALDENORA PERRONE AMADOR
DEMETRIUS GONÇALVES DE ARAÚJO
FÁBIO HENRIQUE MARINHO CABRAL
FERNANDO CARDOSO MATOS
FERNANDO EMMI CORREA
FRANCISCO DO NASCIMENTO FELIX
FRANCISCO FIALHO GUEDES FERREIRA
GILVAN LIRA SOUZA
GLAUCO LIRA PEREIRA
HAROLDO DA COSTA AIRES
MARCO ANTONIO DE OLIVEIRA FREITAS
MARCOS PAULO CINTRA DA SILVA
PAULO GERMANO SOUSA
RAIMUNDO NEVES DE SOUZA
RAIMUNDO OTONI MELO FIGUEIREDO
REGINALDO DA SILVA

Miguel Chaquiam – Natanael Freitas Cabral

Apresentação

O SINEPEM constitui-se um fórum de discussões e intercâmbios de conhecimento científico nas áreas temáticas do referido evento. Permitirá traçar novos rumos e definir novas perspectivas para o Ensino da Matemática nos Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia. Como contribuições o evento proporcionará a troca de experiências entre professores, pesquisadores e estudantes de várias instituições de Educação Científica e Tecnológica, bem como a difusão de conhecimentos matemáticos provenientes de pesquisas, por meio de comunicações científicas e debates sobre diversas perspectivas.

Consideramos importante apresentar aos estudantes de nível superior, técnico e professores da educação básica e superior da Amazônia um conjunto de obras diversificadas tendo em vista os avanços dos estudos nas áreas de Educação, Ciência e Tecnologia, na região. Nesse sentido foram organizados os 12 volumes da Coleção I *SINEPEM*.

Uma das metas estabelecidas pela coordenação do *SINEPEM* é criar a versão eletrônica desta coleção, que em parceria com a SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (SBEM-PA) será disponibilizada gratuitamente por meio do site da SBEM-PA.

Demetrius Gonçalves de Araújo
Raimundo Otoni Melo Figueiredo
Reginaldo da Silva
(Coordenadores)

Miguel Chaquiam – Natanael Freitas Cabral

FUNÇÕES
uso, desuso e reflexos no ensino

MIGUEL CHAQUIAM
NATANAEL FREITAS CABRAL

Miguel Chaquiam – Natanael Freitas Cabral

SUMÁRIO

Miguel Chaquiam – Natanael Freitas Cabral

FUNÇÕES

uso, desuso e reflexos no ensino

Introdução

Esclarecemos inicialmente que este texto é uma extensão dos trabalhos desenvolvidos em sala de aula na graduação e pós-graduação, quando são discutidos tópicos relacionados aos fundamentos da Matemática e a instrumentalização para o ensino, cujos primeiros tópicos fazem parte do livro *Uso e implicações das linguagens no ensino*, disponível gratuitamente em *www.ghemaz.com.br.*

A preocupação com o ensino e a aprendizagem da Matemática tem sido um tema constante nos congressos e encontros que reúnem profissionais da educação, sejam eles pedagogos ou matemáticos, professores em exercício ou em formação. Sugestões para diminuir o problema, agravado principalmente pelo fracasso dos alunos diante dessa disciplina, revelado nas últimas avaliações realizadas pelos órgãos governamentais, têm sido debatidas e apresentadas em eventos tanto internacionais como nacionais e regionais.

Sabe-se que escrever na língua materna é uma das formas de interpretar, explicar e analisar o mundo. Observa-se que a Matemática é outra dessas formas construída ao longo da história que tem seus códigos e linguagem própria, além de um sistema de comunicação e de representação da realidade.

Por outro lado, observa-se também que a linguagem matemática desempenha um papel significativo dentro da própria Matemática, bem como, da cultura, mas, para sobreviver necessita do apoio da linguagem materna para a realização da comunicação.

Sabemos que a Matemática tem linguagem própria e que para compreender o significado matemático é imprescindível aprender a falar, a ler e a nos comunicar nessa língua. Comparar a matemática com o falar e escrever na língua materna é fundamental. Segundo D'Ambrosio (1986):

> [...] o fato de a matemática ser uma linguagem (mais fina e precisa que a linguagem natural) que permite ao homem comunicar-se sobre fenômenos naturais, consequentemente, ela se desenvolve no curso da história da humanidade desde os "sons" mais elementares, e, portanto intimamente ligada ao contexto sociocultural em que se desenvolve – por isso falamos em matemática grega, matemática hindu, matemática pré-colombiana (D'AMBROSIO, 1985, p. 35).

Estar matematicamente alfabetizado significa que o sujeito entende o que lê e o que escreve bem como percebe o significado do ato de ler e escrever no contexto da Matemática.

Do conceito de analfabetismo, criado pela UNESCO (Organizações das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura) em 1958, revisto em 1978 (UNESCO, 1990), entende que uma pessoa:

> É considerada alfabetizada funcional a pessoa capaz de utilizar a leitura/escrita para fazer frente às demandas de seu contexto social e usar essas habilidades para continuar aprendendo e se desenvolvendo ao longo da vida. [...] São analfabetas funcionais as pessoas com menos de 4 anos de escolaridade. (INAF, 2002)

Atualmente é comum a menção ao analfabetismo matemático que caracterizaria o fato de que um sujeito não consegue desenvolver um mínimo de habilidade matemática. Isto significaria conhecer e distinguir os números, as operações aritméticas básicas, mas ser incapaz de formular qualquer análise crítica ou tirar conclusões a partir de informações numéricas.

Talvez, pois na maior parte das vezes, porque o ensino esteja sendo alicerçado no trabalho mecânico e descontextualizado, em técnicas operatórias e na memorização de fórmulas e propriedades.

> Os dados do INAF vêm sendo largamente divulgados pela imprensa, chamando a atenção do grande público para as

> consequências dos déficits de escolarização da população brasileira, fomentando o debate sobre o significado das aprendizagens escolares e para as possibilidades de se continuar aprendendo ao longo da vida, numa sociedade que exige dos trabalhadores e dos cidadãos a capacidade de se reciclar e atualizar continuamente (FONSECA, 2004, p. 9).

Dessa forma, o que se tem percebido é o desenvolvimento de estudos e pesquisas que procuram solucionar as dificuldades vivenciadas e apontadas por professores e estudantes nos diversos níveis de ensino, ou mesmo frente às situações do cotidiano que exigem o conhecimento matemático.

O letramento em Matemático, de acordo com o relatório do Programa Internacional de Avaliação de Estudante (PISA), é a capacidade de um indivíduo de identificar e compreender o papel da Matemática no mundo por meio de seus signos e linguagens, de fazer julgamentos bem fundamentados e de se envolver com a Matemática de modo a satisfazer às suas necessidades como cidadão.

Dentre as dificuldades de aprendizagem em Matemática Sanches (2004) destaca cinco grupos, ou seja, pode haver dificuldades em relação ao desenvolvimento cognitivo e à construção da experiência matemática; dificuldades quanto às crenças, às atitudes, às expectativas e aos fatores emocionais acerca da matemática; dificuldades mais intrínsecas, como bases neurológicas, alteradas; dificuldades relativas à própria complexidade da matemática, como seu alto nível de abstração e generalização, a complexidade dos conceitos e algoritmos e também:

> Dificuldades originadas no ensino inadequado ou insuficiente, seja porque à organização do mesmo não está bem sequenciado, ou não se proporcionam elementos de motivação suficientes; seja porque os conteúdos não se ajustam às necessidades e ao nível de desenvolvimento do aluno, ou não estão adequados ao nível de abstração, ou não se treinam as habilidades prévias; seja porque a metodologia é muito pouco motivadora e muito pouco eficaz. (SANCHES, 2004, p. 174)

Para grande parte das pessoas a leitura e a escrita são ações exclusivas associadas à língua materna, entretanto, existem outras formas de interpretar, explicar e analisar o mundo. A Matemática, por exemplo, é uma dessas formas que com seus códigos e sua linguagem própria, possui um sistema de comunicação e de representação da realidade construído ao longo de sua história.

É fácil percebermos que a todo instante estamos convivendo com várias formas de linguagem, sejam elas artísticas, corporais, coloquiais, cultas, gráficas ou digitais onde cada uma possui um conjunto de características próprias. E de acordo com Lorenzato (2008, p.43), *a matemática também possui uma linguagem própria que se apresenta com seus termos, símbolos, tabelas, gráficos, entre outros.*

Fazer uma leitura, seja de uma tirinha ou de um texto que faz uso da língua materna ou matemática, não é um ato mecânico de decifração em que apenas são decodificados sinais gráficos. É importante entender que quando lemos um texto, não importa o gênero ou a linguagem, colocamos em prática nosso sistema de valores, crenças e atitudes que refletem a sociedade em que fomos criados.

O essencial é explorar uma situação posta em todas as direções, principalmente em Matemática, tendo em vista que o objetivo é o processo e não o simples resultado. Se de fato o aluno compreende um conceito, ele fará as conexões necessárias para atingir novos conhecimentos, deixar as resoluções mecânicas e elaborar suas formas de pensar, por outro lado, precisa ter oportunidades nas quais poderá refletir sobre os termos matemáticos que usa.

Quanto maior for o grau de relação entre as variáveis – *leitor*, *texto* e *contexto* – e quanto mais elas estiverem imbricadas umas nas outras, maior será a compreensão na leitura varia segundo. Por exemplo, o que podemos abstrair da tirinha abaixo?

Folha de S. Paulo, 7/9/2000.

É recomendável a utilização de gêneros discursivos nas aulas de Matemática, dentre eles: livros, artigos, resumos, resenhas, relatos de experiências dos diversos campos científicos, notícias de jornais, reportagens, textos de opinião, relatos de investigações e instruções de uso e de montagem. Proporcionar aos estudantes textos de diversos gêneros pode contribuir para uma aprendizagem mais significativa e exercitar habilidades específicas para leitura compreensiva de textos que envolvem situações do cotidiano.

Cabe ao professor analisar os livros didáticos que fará uso, avaliar se trazem conteúdos adequados e compatíveis ao seu planejamento, observado o atendimento aos objetivos didáticos de cada ano e, além disso, se perguntar: *Que conteúdos trazem e quais serão trabalhados ou excluídos*? *Quais conteúdos deverão ser inseridos/contemplados para ampliar, contrapor ou desenvolver os conceitos serão abordados*? *Quais conteúdos poderão ser desenvolvidos com autonomia pelos alunos e quais precisarão de maior mediação do professor*?

Ainda sobre a seleção de textos para uso em sala de aula, os professores dispõem de diversas opções que podem ser exploradas com a inserção de texto que retratem a história da matemática ou histórias que possam evidenciar quanto a matemática pode ser divertida e curiosa. Um estilo bem conhecido pelos professores, embora pouco utilizado em sala, é forma com que Malba Tahan – Júlio Cezar de Melo e Souza (06/05/1895 - 18/06/1974) – incorpora a matemática em seus contos.

As pesquisas apontam que um dos problemas a serem enfrentados pela escola atualmente, em particular, pelo professor de Matemática, relaciona-se ao fato de que a não garantia de uso eficaz da linguagem materna e matemática, condição para que os alunos possam construir conhecimentos, impede o desenvolvimento de um trabalho formativo nas diferentes áreas do conhecimento, particularmente em Matemática.

Deve-se observar que as linguagens materna e matemática, seja na forma oral ou escrita, quando não são utilizadas em sala de aula de forma clara e objetiva, trazem prejuízo para o processo de ensino e de aprendizagem, portanto, elas devem ser apresentadas de forma claras e precisas de modo a evitar conclusões errôneas.

Fazendo uma associação ao exemplo apresentado por Klein (1976) a respeito de questões simples e que podem ser interpretadas de forma equivocadas se não houver certo cuidado com a linguagem, pergunto: *Comprei dois cadernos por R$ 40,00, quanto custa cada um?* De um modo geral, as pessoas responderiam R$ 20,00 cada caderno, sem levar em conta que não está explícito se os cadernos são ou não iguais.

Apresentar e discutir questões relacionadas aos diversos tipos de linguagem com o aluno contribui para que ele desenvolva o hábito de estar atento ao real significado de cada palavra/signo dentro de diversas situações/atividades/problemas e se torne mais independente na interpretação, análise e resolução dos mesmos.

Quando um aluno não consegue interpretar ou resolver um problema nos perguntamos: Onde está a dificuldade? No domínio da língua materna, na linguagem matemática ou na própria matemática. Tendo em vista que a nossa comunicação ocorre em sua maioria na língua materna, a linguagem matemática não nos parece ser tão natural, é construída e precisa da língua materna ao longo do processo de construção.

Por outro lado não estamos assegurando competências básicas como a leitura e a escrita na língua materna e em matemática de modo que o aluno possa ter autonomia ou compreender o mundo em sua volta e nem atingindo um dos objetivos constantes nos Parâmetros Curriculares Nacionais que é *comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever sobre, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar e suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas*.

Sabemos de fato a diferença entre situação-problema e exercício? Um problema pode ser entendido como toda e qualquer situação em que se deseja obter uma solução que exigirá do indivíduo os conhecimentos adquiridos. Por outro lado, o exercício pode ser entendido como um mecanismo recorrente para aplicação de repetições de procedimentos e estratégias na resolução de situações rotineiras. Neste sentido, o que pode ser um problema para um indivíduo pode ser um exercício para outro.

Ler e compreender se constitui num ato interativo entre as características do texto e as do leitor e implica decodificar, atribuir e construir significado. Essa interação deve ocorrer entre os conhecimentos prévios desse leitor e as informações contidas no texto que se deseja ler. Dessa interação resulta a compreensão e a construção de uma representação mental, desta forma, pode-se afirmar que ler e compreender um problema matemático escrito significa saber decodificá-lo linguisticamente, reconstruí-lo no seu significado matemático para poder codificá-lo novamente em linguagem matemática.

O professor de Matemática pode orientar, praticar ou viabilizar leituras de textos, inclusive textos matemáticos, não só na perspectiva de ensino da Matemática, mas também na perspectiva de desenvolvimento da compreensão leitora do aluno. Devemos ter em mente que o ensino e a aprendizagem de Matemática são mediatizados pelos diversos tipos de linguagens, principalmente pelas linguagens matemática e materna.

A seguir apresento situações que podem ocorrer em sala de aula e gerar implicações no ensino de Matemática. Ressalto a importância do uso correto das linguagens materna e matemática no ensino de Matemática e apresento situações que podem ser evitadas.

A matemática e sua linguagem

Pode-se considerar que a linguagem é constituída sobre um conjunto de regras, conceitos, definições e particularidades próprias e, dependendo do rigor que a situação exija, pode ser apresentada de maneira formal ou informal.

Embora caracterizada pelo rigor de linguagem, este rigor que de certa forma faz parte dessa linguagem não contribui para o fortalecimento da ideia de que este, "rigor", represente dificuldades de aprendizagem matemática quando observado a linguagem utilizada em sala de aula.

Observa-se que a Matemática está repleta de símbolos e regras, que combinados têm sentido e significados dentro de um contexto, constituindo uma linguagem própria. Para lidar com esta linguagem é necessário que o indivíduo seja portador de habilidades específicas para ler, compreender, escrever e se comunicar por meio dela, seguindo um ordenamento lógico com vistas a tingir um resultado. A constituição desse processo envolve elementos internos e externos à Matemática, com variações diversas e não se apresentam de forma estanque ou pronta.

Considerando que a Matemática pode ser apresentada cientificamente ou pedagogicamente, o professor desempenha um importante papel mediando situações para desenvolver no aluno a linguagem matemática de forma que ela se torne natural e significativa.

Ao apresentar as linguagens materna e matemática de forma pedagógica não nos eximi de apresenta-las com o devido rigor, visto que é essencial para a clareza na formulação de conceitos, definições e proposições e que contribua para o encadeamento lógico das ideias e permita a análise da situação nas diversas direções, evitando assim, além do tratamento superficial do conteúdo matemático, a introdução errônea de conceitos que irão prejudicar o desenvolvimento das atividades matemáticas pelo aluno.

Embora alguns estigmas sejam associados à Matemática, como o de ser uma disciplina difícil, estéril e destinada à compreensão de poucos "iluminados", deve-se atentar ao fato de que cada forma de linguagem, materna e matemática, apresentam suas dificuldades específicas, portanto, deve-se observar que as imbricações entre elas e o não entendimento de uma das linguagens venha prejudicar a compreensão da outra.

A Matemática, enquanto disciplina no currículo de qualquer nível, é quase sempre elitizante, alienada e responsável pelos altos índices de reprovação e evasão e, além disso, a maioria dos estudantes a considera um amontoado de coisas inúteis, onde uma parte considerável do conteúdo é tratada como "receita de bolo" sem qualquer relação com o seu cotidiano.

Existem pessoas que estudam "48 horas por dia" mais não aprendem a matéria. Aprendem sim, apenas algumas técnicas de cálculo, mas não conseguem aplica-las em um problema novo.

Embora a Matemática esteja presente no mundo a nossa volta, o que ensinamos na Educação Básica nem sempre tem que servir a um fim material específico do nosso cotidiano.

Entendo que o processo ensino e de aprendizagem poderá atingir o ápice se forem observados três pontos básicos:

O que se ensina. Como se ensina. Para quem se ensina.

Evidentemente, não esquecendo que existem outros fatores que também intervêm nesse processo, dentre eles, podemos citar: recursos didáticos, infraestrutura física e de suporte, falta de interesse por parte do alunado, ausência de preocupação com a qualidade traduzida em efetiva aprendizagem, questões socioculturais e as questões internas a própria Matemática.

Para alguns educadores, por exemplo, Bishop, a maioria das pessoas tende a ver a Matemática como uma disciplina independente da cultura e de valores. E mais, as dificuldades e fracassos em relação à Matemática na escola são usualmente atribuídos aos aspectos cognitivos dos alunos ou a qualidade do ensino anterior. Por outro lado, aspectos internos à própria Matemática, afetivos e socioculturais deixam de ser relevados no ensino e na aprendizagem da Matemática, bem como as ações práticas de professores no contexto escolar.

Abordo algumas questões internas à Matemática e suas implicações no processo de ensino e aprendizagem, correlacionando-as a história, a filosofia e a diversidade que a experiência matemática nos apresenta em função da sua natureza, da sua metodologia, dos benefícios que dela decorrem, de como se aplica e da importância que lhe é atribuída.

As discussões ocorreram no intervalo que vai além das pessoas que fazem uso elementar da matemática, envolve também os que a utilizam no nível superior e outros campos científicos.

O campo de produção do conhecimento matemático é desenvolvido e posicionado por um processo de contextualização primária em que as novas ideias são seletivamente criadas e modificadas, gerando discursos especializados que são desenvolvidos e modificados. Este conhecimento específico está codificado em formas simbólicas e tem de ser decodificado ou traduzido em ordem de modo a tornar-se acessível àqueles que estão fora dos domínios específicos do conhecimento matemático.

De um modo geral, o trabalho de decodificação do conhecimento matemático especializado para a comunicação pedagógica é executado pelo educador, profissional que deve ter uma formação consistente relativa ao conhecimento matemático e não superficial, por outro lado, este está inserido num ambiente escolar repleto de problemas, tendências e tensões que exigem reflexões sobre o mundo social em que vivemos.

Segundo D'Ambrosio, a Matemática se formalizou muito no século XIX e as medidas voltadas para a melhoria do ensino da matemática absorveram esse formalismo que, em geral, é considerado difícil e hermético, levando inevitavelmente o aluno a tornar-se mais lento, não compreender de forma precisa alguns conteúdos ou perder etapa, fato que pode comprometer significativamente a estrutura a ser desenvolvida.

De acordo com Vigotsky, o aluno utiliza conhecimentos externos que vão se transformando em processos internos, desenvolve sistemas simbólicos e organiza os signos em estruturas cada vez mais complexas e articuladas. Neste sentido, os símbolos matemáticos usados pelos alunos dentro de um grupo social contribuem à ampliação da interação e comunicação entre os membros do grupo.

Um símbolo está associado a um conceito, define-o perfeitamente e de forma inequívoca, além de representá-lo abreviadamente com rigor e clareza, talvez por isso, grande número de pessoas, mesmo capazes de utilizar sinais verbais, não conseguem fazer uso de símbolos e raciocínio matemático, mas também pode ser decorrente da natureza abstrata da matemática ou na forma como se ocorre a verbalização no processo de ensino.

A forma em que é desencadeado inicialmente o processo de decodificação de cada símbolo e de cada sequência de símbolos, assim como o emprego e manipulação correto destes, pode implicar no avanço ou retrocesso no processo de ensino, comprometendo a aprendizagem.

Observa-se que a decodificação e manuseio dos símbolos por parte dos professores e alunos na fase de consolidação do conhecimento primário podem tornar-se um obstáculo na aprendizagem da Matemática, visto que há uma impregnação de equívocos quanto o uso da linguagem simbólica no ensino da Matemática.

As discussões apontaram que o conhecimento matemático não se consolida como um rol de ideias e regras prontas que devem ser memorizadas e que para uma aprendizagem significativa é necessário à exploração de uma variedade de ideias relacionando conceitos e contextos do mundo real.

De um modo bastante simplista, generalizar significa em gerar uma conclusão geral resultante da observação de casos particulares produzidos anteriormente, onde as hipóteses das anteriores implicam na hipótese da última, contudo, a hipótese da última não acarreta nenhuma das hipóteses das afirmações anteriores, mesmo considerando suas particularidades.

Alguns professores recorrem durante o processo de ensino da Matemática a exemplificações de alguns casos particulares, procurando identificar aspectos particulares de modo a obter uma generalização, sob a alegação de que a demonstração é muito difícil ou extensa, entretanto, atitudes dessa natureza, sem os devidos esclarecimentos e discussões sobre o conteúdo generalizado, podem contribuir apenas para o processo de memorização e mecanização por parte do aluno. Em alguns casos, a demonstração é, de fato, infrutífera, no entanto, fazê-la pode ser um bom momento para consolidar os assuntos internos a própria matemática, como por exemplo, a técnica de indução finita ou a demonstração envolvendo a contrapositiva inserida no bojo da prova de que $\sqrt{2}$ é um número não racional.

É evidente que apenas o conhecimento de uma fórmula não é suficiente para fazer uso correto desta, assim como, está venha contribuir na aplicação de uma estratégia na resolução de problemas.

Dentre os diversos tipos de generalização, a generalização indutiva corresponde a indução que envolve um raciocínio que parte de um número finito de observações para chegar a generalizações mais amplas, isto é, tipo de inferência que geralmente envolve a passagem de regularidades precedentes a regularidades futuras, embora não seja essencialmente definida como um raciocínio que vai do particular para o geral. Esse tipo de generalização é frequentemente utilizado na ciência experimental, onde a generalização e/ou formulação decorre baseada, quase sempre, em um número relativamente reduzido de observações empíricas.

De um modo geral, a generalização corresponde a um aumento do conhecimento, embora não seja possível em todos os casos abranger todas as particularidades associadas, principalmente se lhes são essenciais.

Segundo Platão, toda a Matemática existe eternamente, independentemente do homem, e o objetivo do matemático é descobrir estas verdades matemáticas, ou seja, descobrir os objetos matemáticos existentes no mundo platônico. Por outro lado, podemos entender que a matemática é resultante da construção humana e seus entes não existem no mundo real, daí a necessidade de concretizá-los de modo que venha favorecer o seu ensino.

Adquirimos conceitos por meio do processo de percepção das similaridades entre os objetos “parecidos” e abstração da semelhança para formar novos conceitos a partir deles, assim como temos a capacidade de formar e lidar com conceitos em função da nossa habilidade de ordenar e arranjar os elementos, agrupando-os de modo a aprimorar e aprofundar nossos conhecimentos e até gerar novos.

Entendo que a abstração empírica ocorre com a identificação dos símbolos (por memorização apenas), enquanto que a abstração reflexiva consiste em estabelecer relações dentro de um contexto, considerando os seus vários significados e interpretações, ou seja, a capacidade de alguém representar os símbolos é considerada abstração empírica, enquanto que sua compreensão na linguagem matemática, usando esses sinais, é considerada abstração reflexiva.

Neste sentido, o conhecimento lógico-matemático consiste na criação e coordenação de ações e relações mentais do aluno sobre o objeto por meio de abstrações empíricas e reflexivas. Evidentemente, não se pode esperar que um aluno construísse conhecimentos meramente convencionais somente por abstrações reflexivas ou empíricas uma vez que há influência e interferência do contexto sociocultural que se encontra inserido.

Por muitas das vezes confiamos mais em nossos sentidos para avaliar ou adquirir novos conhecimentos sobre o mundo, pois, optamos em acreditar no que vemos e tocamos ou em que comprovamos por meio de demonstrações do que ficar ouvindo discursos demasiadamente teóricos.

No tocante as demonstrações, ressalto a importância relativa a apropriação correta das definições de axiomas, lemas, teoremas e corolários, assim como, seu correto emprego ao longo do processo de demonstração. O conceito de axioma é uma ferramenta útil, visto que é uma proposição que age como um tipo especial de premissa inicial num sistema racional, desprovidas de justificação, alicerça o sistema teórico, base a partir da qual surgem as construções por raciocínio dedutivo do restante do sistema.

Também foi consenso nas discussões que a forma mais comum utilizada pelos professores ao enunciar um teorema é "se p, então q", onde p e q representam proposições que, na linguagem simbólica são expressos por $p \rightarrow q$, sendo p o antecedente (hipótese) e q consequente do condicional (tese).

Um primeiro obstáculo ressaltado pelo grupo é a dificuldade de que o aluno encontra em identificar o que é hipótese e tese, principalmente quando faz uso das palavras suficiente e necessário, fato que os leva a utilizar a tese no decorrer da demonstração. Esse tipo de situação é mais evidente no início dos cursos de licenciaturas em Matemática durante o desenvolvimento de conteúdos onde é necessário se fazer uso de demonstração.

Outro obstáculo é a escolha da técnica mais viável, – *Prova Direta* (prova do condicional se faz tomando a hipótese de modo que se deduza a tese), Prova pela *Contrapositiva* (consiste em obter uma forma equivalente ao teorema, onde se utiliza como hipótese a negação da tese e como tese, a negação da hipótese) ou Prova pelo *Reducto ad Absurdum* (consiste na suposição da hipótese e negação da tese, prosseguindo-se com o raciocínio válido até obter uma impossibilidade) – além da falta de domínio da técnica quanto os equívocos cometidos no ato de sua aplicação.

O domínio do processo dedutivo é resultante de um conhecimento consistente relativo às técnicas de demonstração e da capacidade de abstrair da afirmação a ser demonstrado o que deve ser considerado como hipótese e tese, além da correta aplicação e articulação de conceitos e definições.

Segundo Davis e Hersh (1995), a demonstração passa por um processo constante de revalidação ao ser submetida ao escrutínio e à análise crítica de uma nova plateia. Por outro lado, vem contribuir quanto a autoridade e respeitabilidade de que a faz.

De acordo com Machado (2011), as línguas naturais quanto formais se caracterizam como sistemas de signos, situando-se, portanto, no âmbito da Semiótica cujos sistemas comportam três níveis de abordagem: *sintático*, *semântico* e *pragmático*.

Segundo Van Engen (1953, apud BRITO, 2001), as palavras e os símbolos não são sempre empregados da mesma maneira, ou seja, o significado atribuído a um símbolo ou palavra depende da maneira pela qual são relacionados entre si e com outros elementos no contexto em que se encontram.

A *dimensão sintática* compreende o modo com que os símbolos ou as palavras são usados em uma fórmula matemática ou sentença. Por exemplo, o número 3 possui significados diferentes quando o analisamos nas equações $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$ e $3.x - 1 = 2.x + 6$. Nas sentenças *Ele nota muito bem as diferenças entre dízimas periódicas simples e compostas* e *O aluno tirou apenas uma nota dez nas avaliações bimestrais* a palavra *nota* possui significados diferentes.

De acordo com Machado (2011), o nível de abordagem sintático *trata das relações dos signos entre si, do modo como se combinam para formar novos signos compostos, abstraindo o significado de cada signo bem como qualquer relação entre os signos e os interpretantes*.

Neste sentido, um aluno que não domina essa linguagem simbólica e não consegue perceber as suas diferenças em termos de significado ele está fadado a resolver questões de forma mecânica, sem associar significados ou apresentar uma análise contundente da mesma.

A *dimensão pragmática* faz alusão aos significados que cada símbolo ou palavra tem em relação aos conhecimentos do indivíduo. Para Machado (2011), nesse nível de abordagem *os signos são considerados em suas relações não só com os significados, mas também com os interpretantes*.

A *dimensão semântica* é a mais abrangente e aborda as relações entre os signos e seus significados, isto é, faz alusão às várias transformações do significado e aos vários significados que um conceito pode ter em diferentes contextos. Para Machado (2011), *em seu uso corrente, frequentemente, a semântica engloba a pragmática, na medida em que o significado de um signo está associado ao seu uso*.

Os exemplos a seguir ilustram a dimensão semântica quando observado o significado atribuído ao signo x em conexão com outros signos e o que ele representa em cada situação, ou seja, considerando variável real a valores reais, a *função* real definida por $f(x) = 1/x$ (i); as *equações* $x^2 + 1 = 0$ (ii) e $2.x - 7 = 1$ (iii) e, por fim, a *inequação* $|x - 2| \geq 0$ (iv). No caso (i) é possível concluir que x pode assumir qualquer número real não nulo; em (ii), não existe x real que satisfaça a equação; em (iii) a equação é verdadeira apenas para $x = 4$ e, em (iv), x assume qualquer valor real. Os significados atribuídos a x depende da maneira como este é utilizado em conexão com os demais signos, logo, torna-se necessário que o leitor seja sabedor dos significados de cada signo e o que este representa em cada uma das situações.

Machado (2011) nos adverte para o caso das linguagens formais em que *os signos são definidos ou caracterizados a partir das relações que estabelecem com os outros, no interior do formalismo*, expressam o resultado da combinação de regras simbólicas e suas relações.

Considerando que a Matemática possui linguagem própria e formal, com uma extensa simbologia, deve-se observar que no processo de comunicação é necessário que, quando o professor falar de Matemática na língua materna, o aluno faça essa codificação, transforme a língua materna na linguagem matemática. E nesse processo de transformação de linguagens que o aluno irá lidar com os símbolos de forma significativa e acontece a aprendizagem.

De um modo geral é consenso entre os professores que o emprego da linguagem materna e matemática de forma correta são essenciais para limpidez do raciocínio e, portanto, pode evitar alguns erros que de certa forma passam despercebidos e ocorrem em situações frequentes, principalmente em sala de aula.

A seguir caracterizamos algumas dessas situações e tomamos por base para justificar nossos argumentos a segunda edição da coleção *Matemática do Ensino Médio* (ed. SBM, 1997) a primeira edição da coleção Noções de Matemática (ed. Moderna, 1980), os livros *O que é Matemática*?, *Encontro com a Matemática*, *Várias faces da Matemática* e C.Q.D., dentre outros.

Iniciamos com alguns conceitos e definições tendo em vista esclarecer aspectos e indicar o uso correto dos termos em sala. Entende-se que:

a) *Conceitos Primitivos* são conceitos adotados sem definição para que todos os demais possam ser definidos a partir deles. Por exemplo:
   i) Ponto, reta e plano.

b) *Axioma* é premissa imediatamente evidente por si mesma, verdade indiscutível, isto é, proposição cuja validade é imposta sem demonstração como fundamento lógico de outras proposições posteriores. Por exemplo:
   i) Peano escolheu três conceitos primitivos com vistas a fundamentação da Aritmética, são eles: *zero*, *número natural* e a relação *é sucessor de*. Peano formulou os seguintes axiomas:
      A_1 - Zero é um número natural.
      A_2 - Se a é um número natural, então a tem um único sucessor que também é um número natural.
      A_3 - Zero não é sucesso de nenhum número natural.
      A_4 - Dois números naturais que tem sucessores iguais são, eles próprios, iguais.
      A_5 - Se uma coleção S de números naturais contém o zero e, também, o sucessor de todo elemento de S, então S é o conjunto de todos os números naturais.

O axioma A_1 garante que o conjunto dos números naturais não é vazio; A_2 garante a unicidade; e A_5 é denominado de *axioma da indução completa*.

c) *Postulado* é uma premissa imediatamente evidente por si mesma, verdade indiscutível, ou seja, o evidente mas não demonstrado, por exemplo:
   i) Existem infinitos pontos;
   ii) Dada uma reta r, existem infinitos pontos que pertencem a reta e também infinitos pontos que estão fora dela;
   iii) Dado um plano α, existem infinitos pontos que pertencem ao plano e também infinitos pontos que estão fora dele.

Euclides escreve uma lista de postulados e axiomas a partir dos quais outros resultados podem ser obtidos. O primeiro postulado expõe que dois pontos permitem definir uma reta, isto é, dois pontos definem uma única reta.

Em função do exposto observa-se que “axioma” e “postulado” têm um significado bastante intuitivo e se referem essencialmente a princípios fundamentais a partir dos quais podemos deduzir outros princípios considerados como derivados.

Sabe-se que numa teoria matemática as definições são feitas considerando conceitos anteriores, mas estes, por sua vez, dependem de conceitos que os precedem, formando assim um círculo vicioso ou ao chamado *regressus in infinitum*. Para evitar esse círculo vicioso é necessário que consideremos: a) conceitos primitivos – aceitar termos de uma teoria sem uma explicação formal e b) introduzir alguns axiomas (proposições) considerados verdadeiros independentes de qualquer demonstração.

d) *Hipótese* é uma palavra resultante da justaposição dos termos gregos *hypo* (debaixo) e *thesis* (tese), cujo significado nessa língua era atribuído ao que ficava como base ou princípio de sustentação das leis. Na Matemática, as hipóteses são o conjunto de condições iniciais a partir das quais, com base num raciocínio lógico, é elaborada a demonstração de um determinado resultado, chegando a uma tese.

As hipóteses científicas, em geral, são as premissas dentro de uma determinada teoria, que podem ser validadas com base em um método científico, contribuindo para a formulação de novas hipóteses. Se uma hipótese é confirmada, ela se transforma em uma fundamentação de uma teoria científica, se ela é refutada, se transforma em um contra-argumento.

e) *Conjectura* é uma hipótese que os matemáticos acreditam ser verdadeira, mas que ainda não foi demonstrada, ou seja, hipótese é um sinônimo de conjectura matemática. Uma das conjecturas mais conhecidas é a *Conjectura de Poincaré*, um dos maiores problemas da Matemática do séxulo XX, resolvido pelo matemático russo Gigori Perelman.

f) *Tese* é uma palavra oriunda do grego *thesis* que significa proposição. É uma proposição que se apresenta para ser discutida e defendida por alguém, com base em determinadas hipóteses ou pressupostos. A expressão em tese pode significar: de modo geral - de acordo com o que se supõe - em princípio - em teoria.

g) *Lema* é uma proposição preliminar, cuja demonstração facilita a de um teorema subsequente, ou seja, Proposição subsidiária usada na demonstração de outra proposição.

h) *Teorema* é uma proposição científica que pode ser demonstrada, ou seja, é o enunciado de uma proposição ou de uma propriedade que se demonstra por um raciocínio lógico, partindo de fatos dados ou de hipóteses justificáveis, contidos nesse enunciado. Por exemplo:
i) Teorema de Pitágoras - considerado uma das principais descobertas da Matemática, ele descreve uma relação existente no triângulo retângulo cujo enunciado é: *Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos*. Por definição, a *hipotenusa* é o lado oposto ao ângulo reto, e os *catetos* são os dois lados que o formam. O enunciado anterior relaciona comprimentos, mas o teorema também pode ser enunciado como uma relação entre áreas: *Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados cujos lados são os catetos*.
ii) Teorema de Fermat - conhecido por ser o último teorema feito pelo matemático e cientista Pierre de Fermat (1601 - 1665) sem demonstração que o provasse, cujo enunciado é: . Como o matemático

possuía a prática de fazer apenas anotações informais sobre seus estudos, o único indício de uma prova deste teorema é uma observação por ele deixada em 1637 em um de seus livros, "Aritmética", de Diofante: *Eu descobri uma demonstração maravilhosa, mas a margem deste papel é muito pequena para contê-la*. Esta anotação foi descoberta pelo seu filho alguns anos após sua morte, e junto a outros comentários de Fermat, foi publicado numa edição comentada do livro em questão. O Último Teorema de Fermat foi demonstrado em 1995 pelo matemático inglês Andrew Wiles, utilizando como base uma conjectura feita pelos matemáticos Yutaka Taniyama e Goro Shimura, conhecida como conjectura Taniyama-Shimura.

i) *Demonstração* é, segundo os dicionários, qualquer recurso capaz de atestar a veracidade ou a autenticidade de alguma coisa ou raciocínio que torna evidente o caráter verídico de uma proposição, ideia ou teoria. Utiliza-se *prova* como sinônimo de demonstração, entretanto, observa-se que a *prova* é uma espécie de demonstração, usada para demonstrar que um fato ou afirmação são verdadeiros, e ainda pode incluir o significado de demonstração matemática.

j) *Raciocínio* é um processo de estruturação do pensamento de acordo com as normas da lógica que permite chegar a uma determinada conclusão ou resolver um problema. Entende-se também como uma operação intelectual discursiva, pela qual, da afirmação de uma ou mais de uma proposição, passamos a afirmar outra em virtude de uma conexão necessária com as primeiras.

k) *Corolário* é uma proposição que se deduz daquilo que foi demonstrado anteriormente e não reque qualquer prova particular. Por exemplo: *Teorema de Bolzano-Cauchy* ou do *Valor Intermédio* - Seja f uma função contínua no intervalo [a, b] e β um valor entre $f(a)$ e $f(b)$. Então existe pelo menos um valor $\alpha \in [a, b]$ tal que $f(\alpha) = \beta$. O *Corolário* decorrente do *Teorema de Bolzano-Cauchy* possui o seguinte enunciado: Seja f uma função contínua no intervalo [a, b]. Se o produto é negativo *f*(a).*f*(b), ou seja *f*(a).*f*(b) < 0, então a função *f* tem pelo menos um zero no intervalo]a, b[.

l) *Dedução* é uma conclusão lógica de um conjunto de proposições anteriores ou axiomas.

m) *Indução* é raciocínio em que se obtém uma conclusão genérica a partir de fatos particulares. É o oposto de dedução.

n) *Existência* é a propriedade de haver objetos matemáticos que satisfazem determinadas condições.

o) *Unicidade* é o estado ou qualidade de ser único.

p) *Contradição* é a oposição entre duas proposições, das quais uma exclui necessariamente a outra.

q) *Exemplo* é tudo o que pode ou deve servir de modelo ou para ser imitado visando ensinamentos.

r) *Contraexemplo* é uma contradição com o exemplo.

s) *Exercício* é qualquer atividade efetuada ou praticada com o fim de desenvolver ou melhorar um poder ou habilidades específicas.

t) *Paradoxo* é o oposto do que alguém pensa ser a verdade ou o contrário a uma opinião admitida como válida. Um dos paradoxos mais conhecidos na Matemática é o paradoxo de Aquiles e da tartaruga proposto por Zenão. Além do paradoxo de Aquiles e da tartaruga, são atribuídos a Zenão também outros paradoxos, como o paradoxo da flecha imóvel, ou seja, afirmou que uma flecha, ao ser lançada, jamais atinge seu alvo. O espaço a ser percorrido em sua trajetória pode ser infinitamente divisível em segmentos menores, o que implica um translado infinito e inesgotável da flecha. Não podemos esquecer que esse argumento é um argumento abstrato e puramente lógico.

u) *Método* é conjunto de regras para resolver problemas análogos.

   i) *Método da exaustão*, utilizado por Arquimedes e Eudoxo, processo utilizado para o cálculo de áreas de figuras geométricas por aproximação com somas de retângulos que, posteriormente, originou o cálculo infinitesimal.

ii) *Método científico* é o conjunto das normas básicas que devem ser seguidas para a produção de conhecimentos que têm o rigor da ciência, ou seja, é um método usado para a pesquisa e comprovação de um determinado conteúdo. Nesse método parte-se da observação sistemática de fatos, seguido da realização de experiências, das deduções lógicas e da comprovação científica dos resultados obtidos, que no fim de seu processo de pesquisa, explica e prevê um conjunto de ocorrências provenientes da aplicação de suas teses.

iii) *Indução Matemática* é um método de demonstração para provar que vale para indeterminadas e consiste em:
- Demonstrar a validade para P(1);
- Assumir que é valido para P(k) e,
- Demonstrar que vale para P(k+1).

Exemplo: Prove que, $n! > n^2$, para $n \geq 4$.
- A base da indução: $4! = 24 > 16 = 4^2$, para $n = 4$;
- Assumir que $k! > k^2$, para $n = k$;
- Demonstrar: $(k + 1)! > (k + 1)^2$, para $n = k + 1$.

Sabemos que $k^2 > k + 1$, para todo $k \in N$ e maior do que 1.
Assim, multiplicando $k! > k^2$ por $k + 1$, obtemos:

$$(k+1).k! > (k+1).k^2 > (k+1).(k+1) = (k+1)^2$$

$$\therefore \quad (k+1)! > (k+1)^2.$$

v) *Técnica* é conjunto dos métodos e pormenores práticos essenciais à excussão perfeita de uma arte ou profissão ou ciência.

i) *Técnica de Condicionalização* A (antecedente) $\rightarrow$ C (consequente). Neste caso deve-se assumir o antecedente como hipótese e deduzir o consequente, a tese.
Exemplo: Se x é par, então ele é divisível por 2.

ii) *Técnica da negação do consequente* (*Modus Tollens*), neste caso o antecedente passa a ser a negação do consequente e, o consequente, a negação do antecedente, ou seja: $\sim C \rightarrow \sim A$. Por exemplo:

Se $X \subset Y$ e $Y \subset X$, então $X = Y$.

Se $X \neq Y$, então $X \not\subset Y$ ou $Y \not\subset X$.

iii) *Técnica do bicondicional*: $A \leftrightarrow B$.
1º. Usar a técnica do condicional para demonstrar $A \rightarrow B$.
2 º. Usar a técnica do condicional para demonstrar $B \rightarrow A$.
Um exemplo: Um número é par se, e somente se, é divisível por 2.

iv) *Técnica Redução ao absurdo* (*Reductio as absurdum*): Neste caso deve-se assumir a negação da propriedade a ser demonstrada e, a partir dessa, deduzir uma contradição. Do ponto de vista da lógica, A partir de $p \rightarrow q$, faça a suposição da ocorrência de $\sim q$ e mostre que ocorre uma contradição (falsidade). Portanto, a negação da suposição $(\sim(\sim q))$ é uma tautologia (verdade) e, assim, fica demonstrado a condicional $p \rightarrow q$.
A exemplo, "Se X é um conjunto, então o conjunto vazio está contido em X ($\varnothing \subset X$)".

Os itens acima visam esclarecer terminologias, cuidados quanto ao uso e evitar sua aplicação inadequada em sala de aula. Entendemos que o uso da linguagem correta é essencial para limpidez do raciocínio, portanto, torna-se necessário evitarmos erros, que de certa forma passam despercebidos, em decorrência do uso das linguagens. Por outro lado, devemos ter clareza de que seguir estritamente os rígidos padrões da linguagem matemática pode se tornar um obstáculo no processo de ensino.

Sobre as teorias

Nesta seção são apresentadas definições e propriedades relacionadas as funções, com exemplos e contraexemplos que contribuem para elucidar os conceitos abordados e fomentar as discussões em torno dos objetos matemáticos.

Sobre o conceito de função, uma boa opção é iniciar apresentando a ideia de função por meio de problemas que envolvam situações do cotidiano ou expressem fenômenos físicos, químicos, biológicos ou explorar situações nos diversos campos da Matemática, visto que essas discussões iniciais podem contribuir para a consolidação desse conceito quando apresentado formalmente, conceito considerado de relevante na Matemática.

Recordemos que uma função é constituída de três partes: *domínio*, *contradomínio* e *uma regra* que permite associar de forma clara e unívoca elementos do domínio a elementos do contradomínio. Neste sentido, sempre que pudermos associar todo elemento x (variável independente) de um conjunto X (domínio) a um único elemento y (variável dependente) de um conjunto Y (contradomínio), denominaremos essa associação de *função*.

Destacamos notações associadas às funções e seus significados:

f	Função f
$f: X \to Y$	Função f definida de X em Y
$f(x)$	Imagem do elemento x por meio da função f
$f(x) = y$	Imagem x associada ao elemento y do contradomínio
$D(f) = X$	Domínio da função f
$CD(f) = Y$	Contradomínio da função f
$Im(f)$	Conjunto imagem da função f definido por: $Im(f) = \{ y \in Y \mid \exists x \in X;\ f(x) = y\}$
$G(f)$	Grafo da função f definido por: $G(f) = \{ (x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$

A natureza da regra que informa como obter o valor $f(x)$ é inteiramente arbitrária desde que sejam cumpridas as seguintes condições:

i. Não há exceções – Todo elemento x do domínio possui uma imagem.
ii. Não há ambiguidades – A cada x corresponde um único elemento $f(x)$.

Ao longo das nossas observações nos campos de estágio temos nos deparado com situações onde professores definem função a partir de produto cartesiano e relação que cumpre as condições (i) e (ii) acima, entretanto, vale ressaltar que essa definição não traz em seu bojo a ideia intuitiva de função como correspondência, dependência, transformação, movimento, vinculação, variação, mudança, etc. Além disso, repassa ao aluno de que as funções são subconjuntos das relações definidas a partir de produtos cartesianos, principalmente quando se "enfatiza que todo função é uma relação, mas nem toda relação é uma função".

Deve-se observar que $f(x)$ é imagem do elemento $x \in D(f)$ pela função f, pois, algumas vezes, dizemos "a função $f(x)$" quando deveríamos dizer "a função f". Por outro lado, quando dizemos simplesmente "a função f", deve ficar subentendidos seu domínio e seu contradomínio, pois, uma função consta de três partes: domínio, contradomínio e a lei de correspondência $x \mapsto f(x)$.

Por simplificação, deixamos de explicitar o domínio e o contradomínio de uma função; quando tal fato ocorrer, ficará implícito que o contradomínio é $\Re$ e o domínio um subconjunto de $\Re$ que contém todos os outros possíveis subconjuntos para o qual faz sentido a regra em questão.

As funções que serão definidas neste texto são denominadas de funções unívocas. Quando a cada x do domínio está associado mais de um y do contradomínio, denominamos essa associação de função plurívoca.

Daqui por diante fica implícito que ao dizermos função estamos nos referindo a função unívoca e, para ilustramos esse conceito, apresentamos o exemplo: Uma pequena fábrica caseira pode produzir até 5 unidades diárias de um determinado artigo. O custo operacional diário registrado é dado por:

Nº de unidades -	0	1	2	3	4	5
Custo diário (R$) -	50	70	90	110	130	150

Podemos representar estes registros que retratam uma situação que se assemelha a outras situações do cotidiano de diversos modos, dentre eles:

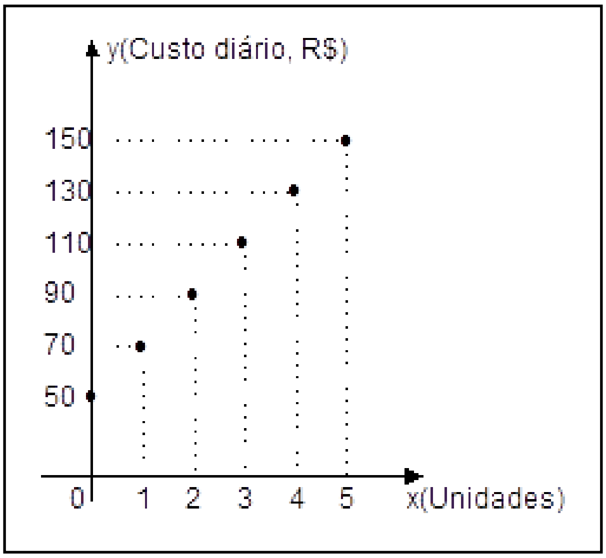
- Por meio de um quadro:

x (Nº de artigos)	y (Custo diário, R$)
0	50
1	70
2	90
3	110
4	130
5	150

- Por meio de pares ordenados:

$$\{(0,50);(1,70);(2,90);(3,110);(4,130);(5,150)\}$$

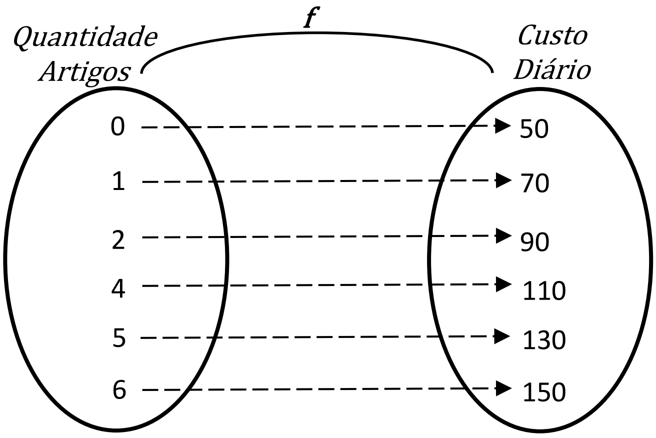
- Por meio de um gráfico:



- Por uma regra: O custo operacional diário é igual ao número de itens produzidos multiplicados por 20, adiciona-se 50 ao resultado.

- Por uma equação: $y = 20x + 50$, onde x representa o número de artigos e y o custo operacional diário.

- Por meio de um diagrama:



Ressaltamos que nem todo quadro, conjunto de pares ordenados, gráfico, regra ou equação podem representar uma função.

Outra situação bastante comum em sala de aula são perguntas da seguinte natureza:

Qual das expressões a seguir representa uma função:

a) $y = x^2$
b) $y = 2.x - 1$
c) $y = (x + 1)^{1/2}$

Recordando que uma função é constituída de três partes, observa-se que situações dessa natureza podem induzir o aluno ao erro facilmente, uma vez que não estão definidos o domínio e o contradomínio de cada numa das funções acima. Na verdade fica subentendido que são funções reais a valores reais. Outro problema associado a essa questão é a representação gráfica das mesmas, visto que a maiorias dos alunos respondem que a representação do gráfico da função definida por $y = x^2$ é uma parábola com vértice na origem e côncava para cima.

Outro equívoco bastante está associado a *função afim*, de um modo geral definida corretamente, entretanto, quando observado que seu gráfico é representado por uma reta e que a expressão que a define, por um polinômio, associa-se a esta função *coeficiente angular* e *grau*, quando o mais adequado é *taxa de variação* (crescimento ou decrescimento) e que não há definição de grau para função, desde que esta não seja definida por um polinômio, que nem sempre é o caso.

Poucos exploram o caso específico da função afim, a função linear, com a proporcionalidade, visto que a expressão $y = \mathrm{a}.x$ equivale a dizer que a grandeza y é diretamente proporcional a grande x. O número a é denominado de constante de proporcionalidade.

Outro cuidado que devemos ter ao representar graficamente uma função definida por uma expressão do tipo $y = \mathrm{f}(x) = \mathrm{a}.x + \mathrm{b}$ é verificar se as variáveis envolvidas são contínuas ou discretas para não incorrer no erro de traçar uma reta quando se tratar de variáveis discretas.

Quanto ao estudo da *função quadrática* destacamos duas situações, uma bastante recorrente e outra pouco tratada com um pouco mais de profundidade.

A *função quadrática* é representada graficamente por uma parábola e está por sua vez possui uma propriedade geométrica muito interessante se a girarmos em torno do seu eixo para formar um paraboloide de revolução. Relembremos que, quando um feixe de luz incide sobre uma superfície refletora, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão, fazendo com que todos os raios do feixe de luz passem num único ponto, o foco da parábola.

Outro caso importante, além do citado acima, é que podemos associar aos estudos da disciplina física a função quadrática como modelo matemático que descreve o movimento uniformemente variado, por exemplo, a queda livre de um corpo sujeito apenas a ação da gravidade cuja expressão matemática que determina sua altura em função do tempo é $s(t)\ 0{,}5.g.t^2 + v_0.t + s_0$, onde t representa o tempo, g a aceleração da gravidade, v_0 a velocidade inicial e s_0 a posição inicial do corpo.

Embora seja natural associarmos formas mnemônicas visando relembrar o assunto em dado momento, o estudo do sinal da função quadrática fica muito restrito a aplicação de m/a c/a m/a ou c/a m/a c/a, onde m/a significa ”mesmo de a” e c/a “contrário de a”, quando uma simples análise do comportamento e zeros a caracterizam muito bem.

Uma *função exponencial* definida pela expressão $y = f(x) = a^x$ transforma uma sequência aritmética, cujos termos x_1, x_2, ..., x_n, ... pertencem domínio da função, numa sequência geométrica cujos termos pertencem ao conjunto imagem dessa função.

Dois outros equívocos bastantes comuns são: i) chamar o número e, número de Euler, de base do logaritmo neperiano e ii) tratar o logaritmo natural como logaritmo neperiano. A expressão $\log_e(x)$ é equivalente a $\ln(x)$ e trata-se do logaritmo natural.

Utilizando funções bijetoras é fácil ver que o conjunto de números naturais possui a mesma cardinalidade que o conjunto dos números pares ou ímpares, para tanto, consideremos a função $f(n) = 2.n$ ou $g(n) = 2.n+1$, definidas no conjunto dos números naturais e contradomínio o conjunto dos números pares e ímpares, respectivamente. De modo análogo é possível mostrar que os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais possuem a mesma cardinalidade.

Consideremos a função $f: \Re \to \Re$, definida por $f(x) = x^2 - 4$ e a equação $x^3 - 7x^2 + 12x = 0$. Os números reais -2 e 2 são *zeros* da função f uma vez que $f(-2) = 0$ e $f(2) = 0$. Por outro lado, os números reais 0, 3 e 4 são as *raízes* da equação $x^3 - 7x^2 + 12x = 0$, visto que, substituindo esses números na equação obtém-se zero.

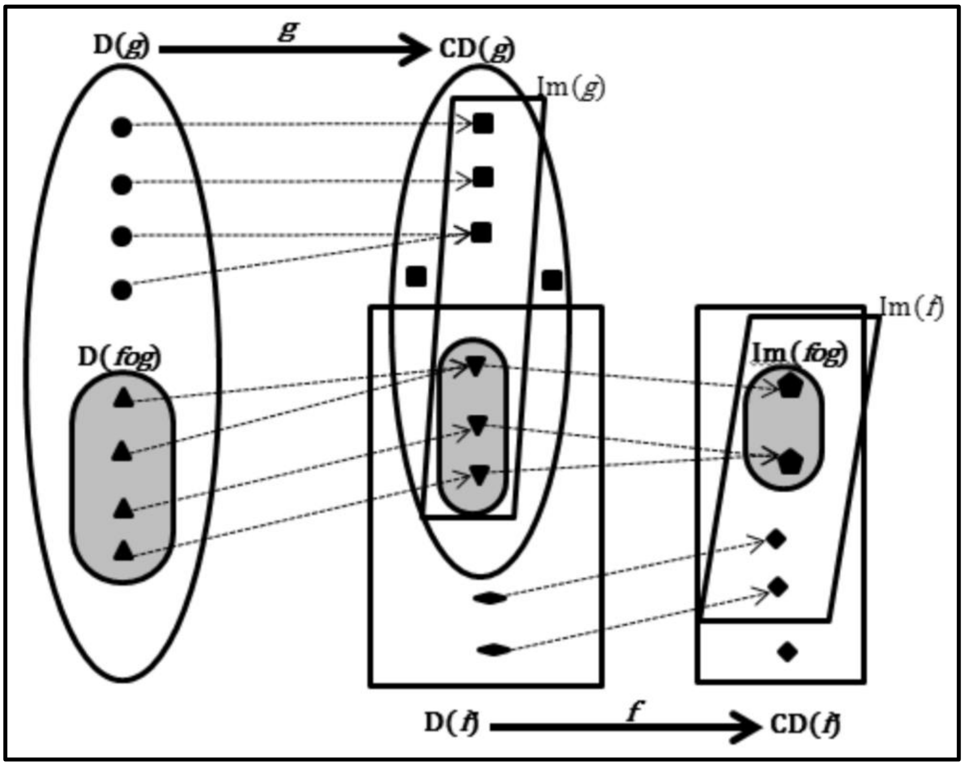
Sobre o domínio e contradomínio de funções, $f: X \to Y$, de um modo geral é considerado $X \subset \Re$ e $Y \subset \Re$. Em tais casos assume-se que f é uma função real – fato de que f assume valores reais – a valores reais – fato decorrente de que os elementos do domínio serem números reais.

Em decorrência de assumirmos que f é uma função real a valores reais, é muito comum observarmos atividades que apresentam a seguinte solicitação: *Qual o domínio da função* $f(x) = \sqrt{2x-6}$? Neste caso, espera-se que seja apresentado o seguinte conjunto como resposta $D(f) = [\,3\,, +\infty)$.

Fica o questionamento em face do apresentado anteriormente, se um grupo de alunos que apresentassem como resposta os seguintes conjuntos $D(f) = \{x \in N \mid x \geq 3\}$; $D(f) = \{x \in Q \mid x \geq 3\}$; $D(f) = \{x \in \aleph \mid x \geq 6\}$, ou simplesmente $D(f) = \{\,3\,\}$ ou $D(f) = \{3, 6\,\}$ estariam errados?

Evidentemente, não! Todas as respostas apresentadas estariam corretas, entretanto, como solicitar exatamente a resposta esperada? Neste caso estamos nos referindo ao conjunto X como o domínio maximal de definição ou simplesmente como domínio maximal de *f*, ou seja, X é um subconjunto do conjunto dos números reais que contém todas as outras possibilidades de domínio da função *f*. Em outras palavras, o conjunto X é o "*maior domínio possível*" da função *f*.

Sobre a composição de funções, de um modo geral, os livros didáticos apresentam uma versão simplifica. Para esclarecermos tal afirmativa consideremos as funções f: $D(f) \rightarrow CD(f)$ e g: $D(g) \rightarrow CD(g)$ e o esquema abaixo:



Sobre a função composta *fog* é importante ressaltar que:

i. O domínio da função composta *fog* deve estar contido no domínio da função *g*, ou seja, $D(fog) \subset D(g)$;

ii. A imagem do conjunto D(*fog*) deve estar contida no domínio da função *f*, o conjunto D(*f*), simbolicamente $g(D(gof)) \subset D(f)$. Caso contrário, a composição não estará definida;

iii. O conjunto imagem da função composta *fo*g está contido no conjunto imagem da função *f*, isto é $Im(fog) \subset Im(f)$.

Observa-se no diagrama que o domínio da função composta *fog* é uma restrição do domínio da função *g* e que a imagem do conjunto D(*fog*) está contida no conjunto imagem da função *g*, simbolicamente, $g(D(gof)) \subset Im(g)$.

De um modo geral, os livros didáticos consideram apenas:

$$f: A \to B \qquad e \qquad g: B \to C$$

Para melhor entendimento do exposto sobre composição de funções, tomemos as seguintes funções:

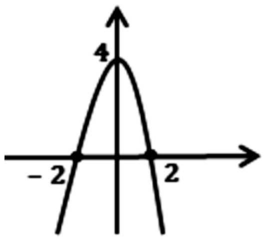
$g: \Re \to [\,10\,, -\infty)$, definida por $g(x) = 4 - x^2$ e

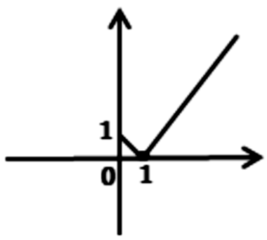
$f: \Re_+ \to \Re$, definida por $f(x) = |x - 1|$

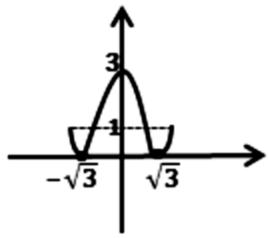
A função composta *fog*, cujo domínio maximal está contido em D(*g*) e o conjunto imagem contido no conjunto Im(*f*), será definida do seguinte modo $fog: [-2\,, 2] \to \Re$, definida por $fog(x) = |3 - x^2|$.

$g: \Re \to [\,10\,, -\infty)$ | $f: \Re_+ \to \Re$ | $fog: [-2\,, 2] \to \Re$

$g(x) = 4 - x^2$ | $f(x) = |x - 1|$ | $fog(x) = |3 - x^2|$







A situação nos remete ao seguinte questionamento:

Como determinar o domínio maximal da função composta fog?

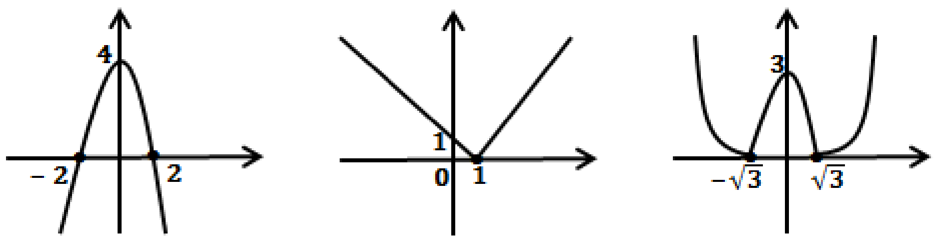
Observado que o domínio da função *g* é $D(g) = \Re$ e que a imagem da função *g* deve está contida no domínio da *f*, ou seja, para quais valores reais de *x* tem-se $g(x) \geq 0$, isto é, $4 - x^2 \geq 0$. A intersecção do domínio da função *g*, D(*g*), com o conjunto resultante da resolução da inequação $4 - x^2 \geq 0$, define o domínio da função *fog*, isto é, $D(fog) = \{x \in \Re \mid -2 \leq x \leq 2\}$.

Uma situação análoga a exposta, seguindo o apresentado nos livros didáticos, pode ser definida da seguinte forma:

$g: \Re \to \Re$, definida por $g(x) = 4 - x^2$ e

$f: \Re \to \Re$, definida por $f(x) = |x - 1|$

A função composta *fog* ficaria simplificada a $fog: \Re \to \Re$, definida por $fog(x) = |3 - x^2|$.



Usos e desusos

Iniciamos ressaltando fatos relacionados às funções, mais precisamente, situações que são pouco enfatizadas ou não mais contempladas. Por exemplo, seja a função $f: X \to Y$ e A um subconjunto do domínio da função f, com $A \neq X$: Pergunta-se: Qual a imagem do subconjunto A, via função f?

Neste caso estamos interessados em obter o conjunto imagem de um conjunto (subconjunto), não estamos falando do conjunto considerado imagem da função f. Em outras palavras queremos saber qual o conjunto $f(A)$. Para tanto, precisamos definir $f(A)$, ou seja, de acordo com Lipshutz (1972), define-se como $f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$.

Para ilustrar a situação acima descrita consideremos a função $f: Z \to \Re$, definida por $f(x) = x^2 - 1$ e o subconjunto $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. A imagem do subconjunto A, via f, é $f(A) = \{-1, 0, 3\}$. É evidente que o conjunto $f(A)$ é um subconjunto do conjunto $Im(f)$, isto é, $f(A) \subset Im(f)$.

Outro tópico que está esquecido, ou pouco explorado, são as funções aritméticas, funções definidas no conjunto dos números inteiros positivos.

Denomina-se de *função aritmética* toda função f definida no conjunto dos números inteiros positivos a valores reais, em outros termos, $f: N \to \Re$. Portanto, $D(f) = N$ e $CD(f) = \Re$ e o conjunto imagem da função f é dado por $f(N) = \{f(n) \in \Re \mid n \in N\}$, sendo $f(N) \subset \Re$.

Alencar Filho (1988) considera as funções a seguir definidas como *funções aritméticas* usuais, associadas a teoria dos números, por meio das quais podemos explorar número de divisores de um inteiro positivo n, ou a soma dos divisores desse número. Também é possível associar o número total de fatores primos ou número de divisores primos distintos do número inteiro positivo n. Para tanto, consideremos as funções definidas de N em $\Re$, definidas por:

- $d(n)$ é a imagem do inteiro positivo n, via função d, que associa ao número n, o número de divisores positivos de n, a exemplo, $d(1) = 1$, $d(2) = 2$, $d(4) = 3$, $d(6) = 4$ e $d(30) = 8$.
- $s(n)$ é a imagem do inteiro positivo n, via função s, que associa ao número n, a soma dos divisores positivos de n, a exemplo, $s(1) = 1$, $s(2) = 3$, $s(4) = 7$, $s(6) = 12$ e $s(30) = 72$.
- $t(n)$ é a imagem do inteiro positivo n, via função t, que associa ao número n, o número total de fatores primos de n, a exemplo, $t(1) = 0$, $t(2) = 1$, $t(4) = 1$, $t(6) = 2$ e $t(30) = 3$.

- $\nu(n)$ é a imagem do inteiro positivo n, via função ν, que associa ao número n, o número de divisores primos distinto de n, a exemplo, $\nu(1) = 0$, $\nu(2) = 0$, $\nu(4) = 1$, $\nu(6) = 2$ e $\nu(30) = 3$.

Em relação a *função afim*, outro ponto pouco discutido é a caracterização desta função, ou seja, dada uma sequência aritmética cujos termos $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ são elementos do domínio, a imagem dos termos dessa sequência via *função f* constituem uma nova sequência aritmética, isto é, se considerarmos função definida por $y = f(x) = a.x + b$, obtém-se:

$x_1 = q \qquad \Rightarrow y_1 = f(x_1) = aq + b$
$x_2 = q + r \qquad \Rightarrow y_2 = f(x_2) = a.(q + r) + b = (aq + b) + ar$
$x_3 = q + 2r \qquad \Rightarrow y_2 = f(x_2) = a.(q + 2.r) + b = (aq + b) + 2.(ar)$
. . .
$x_n = q + (n - 1).r \quad \Rightarrow y_n = f(x_n) = a.(q + (n - 1)r) + b = (aq + b) + (n - 1)(ar)$
. . .

Observe que a imagem dos termos da sequência aritmética $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ constituem uma nova sequência aritmética inserida no conjunto imagem da função.

Esse mesmo procedimento também pode ser aplicado as funções quadrática, exponencial e logarítmicas, ou seja, no caso da função quadrática, esta transforma sequência aritmética em sequência aritmética de segunda ordem.

Complementarmente apresentamos o caso da exponencial a seguir considerando a função $y = f(x) = \lambda.a^{\beta.x}$:

$x_1 = q \qquad \Rightarrow y = f(x_1) = \lambda.a^{\beta.q}$
$x_2 = q + r \qquad \Rightarrow y = f(x_2) = \lambda.a^{\beta.(q+r)} = \lambda.a^{\beta.q}.(a^{\beta.r})$
$x_3 = q + 2r \qquad \Rightarrow y = f(x_3) = \lambda.a^{\beta.(q+2r)} = \lambda.a^{\beta.q}.(a^{\beta.r})^2$
$x_4 = q + 3r \qquad \Rightarrow y = f(x_4) = \lambda.a^{\beta.(q+3r)} = \lambda.a^{\beta.q}.(a^{\beta.r})^3$
. . .
$x_n = q + (n - 1).r \quad \Rightarrow y = f(x_n) = \lambda.a^{\beta.(q+(n-1)r)} = \lambda.a^{\beta.q}.(a^{\beta.r})^{n-1}$
. . .

Observa-se neste caso que a sequência aritmética escolhida no domínio da função é transformada numa sequência geométrica, inserida no conjunto imagem da função.

No caso da função logarítmica, a sequência a ser tomada no domínio da função deve uma sequência geométrica que será transformada numa sequência aritmética.

Outro caso que merece atenção são as expressões que determinam o montante, tanto na lógica de aplicação de juro simples como na de juro composto, se pode tratar as relações funcionais, ou seja:

$M_S = C_0 + C_0 \times i \times t$ ou $M_S = (C_0 \times i) \times t + C_0$ (Montante a juro simples)

$M_C = C_0 \times (1 + i)^t$ (Montante a juro composto)

Onde C_0 representa o capital inicial a ser aplicado, i corresponde a taxa de aplicação e t o número de períodos ao qual o capital inicial foi aplicado.

Pode-se associar a esses dois modelos os modelos funcionais afim e exponencial, respectivamente, $f(x) = y = a.x + b$ e $g(x) = y = \lambda.a^{k.x}$. Para tanto, deve-se considerar em relação a variação do número de períodos ao qual o capital inicial foi aplicado as seguintes correspondências:

Montante a juro simples: $a = C_0 \times i$ e $b = C_0$

Montante a juro composto: $a = 1 + i$ e $\lambda = C_0$

Considerando as devidas correspondências em nível funcional verifica-se que o domínio e contradomínio são respectivamente:

$$D(f) = D(M_S) = \{t_0 , t_1 , t_2 , \dots , t_n\} = D(M_C) = D(g)$$

onde p_k representa o número de períodos de aplicação do capital inicial C_0, com $k = 0, 1, 2, \dots , n$.

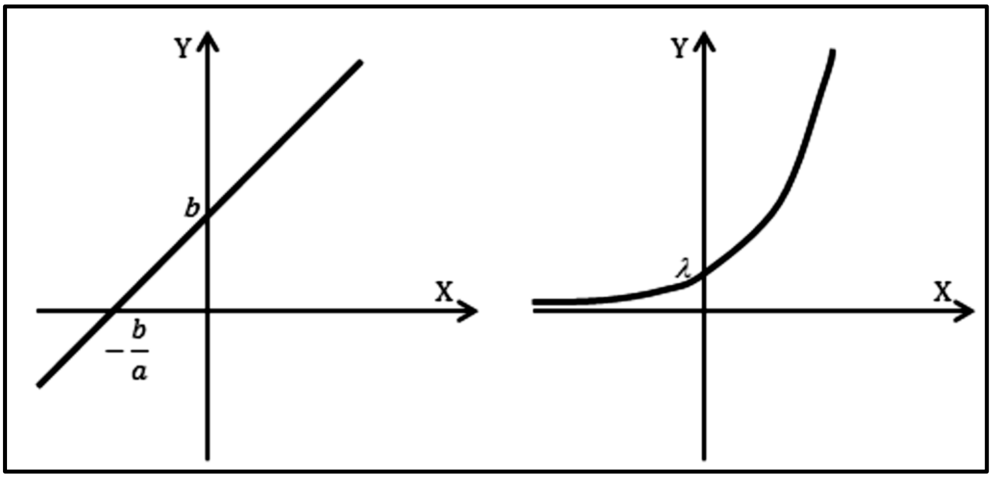
$$CD(f) = CD(M_S) = \{M_{S0} , M_{S1} , M_{S2} , \dots , M_{Sn}\} \text{ e}$$
$$CD(g) = CD(M_C) = \{M_{C0} , M_{C1} , M_{C2} , \dots , M_{Cn}\},$$

onde M_{Ck} corresponde ao montante em relação ao número de períodos de aplicação do capital inicial C_0, com $k = 0, 1, 2, \dots , n$.

Pelo exposto nota-se que os modelos que relacionam a aplicação de um capital a juro simples ou composto são restrições dos modelos afim e exponencial, respectivamente. Na prática trata-se de modelos discretos, fato que implicará na configuração gráfica de ambos.

$f: \Re \to \Re$ $\qquad\qquad$ $g: \Re \to \Re$

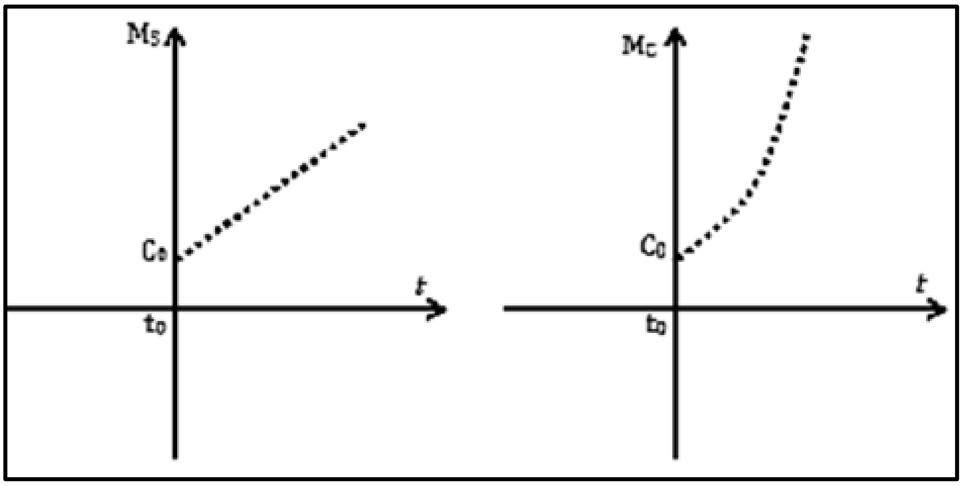
$f(x) = y = a.x + b$ $\qquad\qquad$ $g(x) = y = \lambda.a^{k.x}$



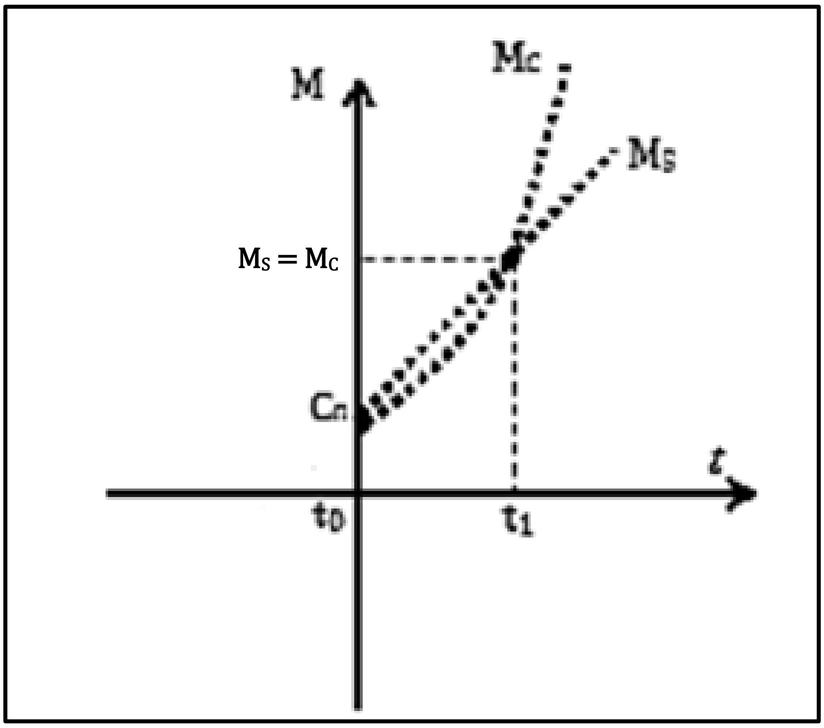
Considerando os modelos funcionais associados a juros simples e composto tem-se:

$f: D(M_S) \to CD(M_S)$ $\qquad\qquad$ $g: D(M_C) \to CD(M_C)$

$f(t) = y = M_S = C_0 + C_0 \times i \times t$ $\qquad\qquad$ $g(t) = y = M_C = C_0 \times (1 + i)^t$



Considerando os modelos funcionais associados a juros simples e composto no mesmo sistema ortogonal de eixos, tem-se:



Agora tomemos por base as teorias relacionadas à álgebra linear e geometria analítica segundo Fainguelert e Bordinhão (1980), onde apresentam a definição a seguir sobre matriz.

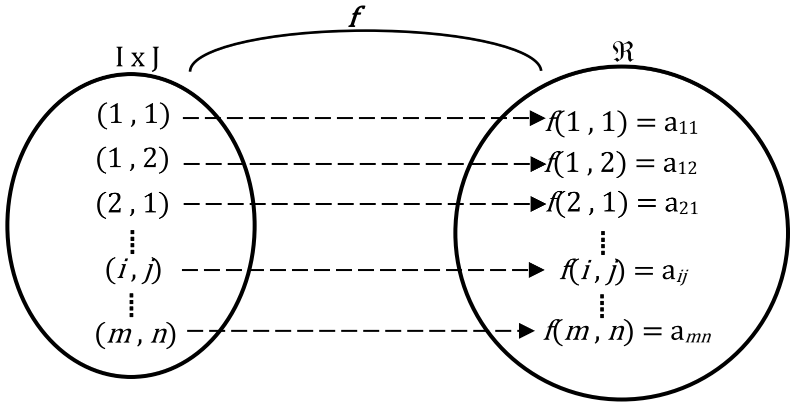
Considere os conjuntos de números naturais:

$$I = \{1, 2, 3, ..., m\} \quad \text{e} \quad J = \{1, 2, 3, ..., n\}$$

e determinemos o produto cartesiano I x J, isto é, $I \times J = \{(x, y) \mid x \in I \text{ e } y \in J\}$

Chama-se matriz mxn a uma correspondência que associa a qualquer elemento $(i, j) \in I \times J$ um único elemento $a_{ij} \in \Re$.

O número a_{ij} é chamado imagem do par (i, j) e a ordem de uma matriz é dada pelo número de linhas e o número de colunas, denotado por mxn, que representa o número de elementos do produto cartesiano I x J.



Uma lei de formação geral de uma matriz A_{mxn} pode ser expressa por

$$a_{ij} = 2^{i} - j,\ \text{com } 1 \le i \le 3 \text{ e } 1 \le j \le 2$$

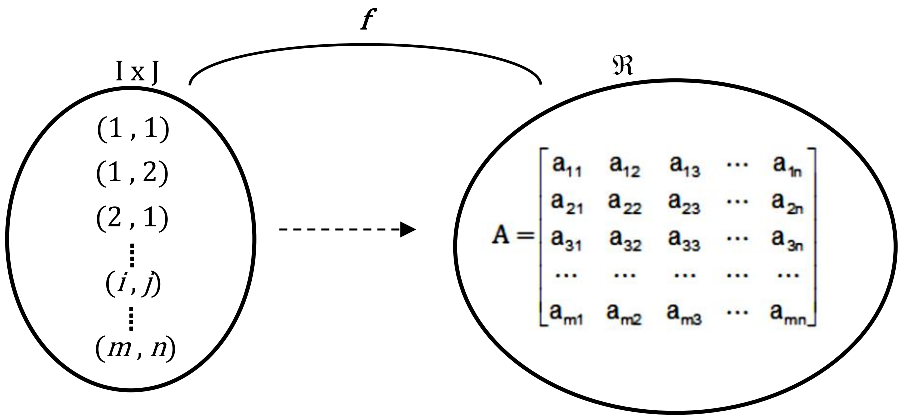
Em outras palavras:

$$f: \{(1,1); (1,2); (2,1); (2,2); (3,1); (3,2)\} \to \Re$$

$$y = f(\mathrm{i}, \mathrm{j}) = a_{ij} = 2^{i} - j$$

Podemos então dizer que uma matriz de ordem mxn, ou simplesmente matriz mxn, é uma tabela de números distribuídos em m linhas e n colunas. Observe que o número de elementos que a constituem é $m.n$.

Em geral os livros didáticos apresentam matrizes como uma organização retangular, que poderá ser melhor entendida a partir da definição apresentada que relaciona cada para ordenado (i , j) ao elemento da matriz a_{ij}.



Em geral, a matriz A, de ordem mxn é representada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ ou, com a notação abreviada $A = (a_{ij})_{m\times n}$.

Assim, indicamos cada um de seus elementos com uma letra minúscula agregada a dois índices, que indicam a posição ocupada por esse elemento na matriz.

Em relação aos determinantes, tomamos por base o livro sobre matrizes de Ayres Jr (1962), onde apresenta a definição de determinante a partir das noções de permutação, inversão na permutação e sinal de permutação.

Uma *permutação* σ do conjunto $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ é uma aplicação biunívoca do conjunto S em si mesmo, isto é, $\sigma : S \to S$ denotada por:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_n \end{pmatrix},$$

onde $\sigma(1) = j_1$; $\sigma(2) = j_2$; $\sigma(3) = j_3$; ... ; $\sigma(n) = j_n$.

Denota-se por S_n o conjunto de todas essas permutações, e o número delas é dado por n! .

Para melhor elucidar essa definição, apresentamos a seguir exemplos até a terceira ordem, ou seja, para $S = \{ 1 \}$, temos apenas a permutação $\sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, expressa simplificadamente por $\sigma_1 = (\ 1\ )$. Sendo $1! = 1$e $S_1 = \{ (\ 1\ ) \}$.

Para $S = \{ 1, 2 \}$, temos as seguintes permutações:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (1 \quad 2) \qquad \text{e} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (2 \quad 1)$$

Observe que $\sigma_1(1) = 1$ e $\sigma_2(1) = 2$, sendo $S_2 = \{ (1 \quad 2), (2 \quad 1) \}$.

Para $S = \{ 1, 2, 3 \}$, temos as seguintes permutações :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1 \quad 2 \quad 3) \qquad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (2 \quad 3 \quad 1)$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1 \quad 3 \quad 2) \qquad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (3 \quad 1 \quad 2)$$

$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Observe que:

$$\sigma_1(1) = 1 \;\; \sigma_2(1) = 1 \;\; \sigma_3(1) = 2 \;\; \sigma_4(1) = 2 \;\; \sigma_5(1) = 3 \;\; \sigma_6(1) = 3;$$
$$\sigma_1(2) = 2 \;\; \sigma_2(2) = 3 \;\; \sigma_3(2) = 1 \;\; \sigma_4(2) = 3 \;\; \sigma_5(2) = 1 \;\; \sigma_6(2) = 2;$$
$$\sigma_1(3) = 3 \;\; \sigma_2(3) = 2 \;\; \sigma_3(3) = 3 \;\; \sigma_4(3) = 1 \;\; \sigma_5(3) = 2 \;\; \sigma_6(3) = 1.$$

Sendo $S_3 = \{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \}$.

Uma permutação $\sigma_k = (j_1 \, j_2 \, j_3 \ldots j_n)$ de S = { 1, 2, 3, ... , n} tem uma *inversão* quando um inteiro j_p precede um inteiro menor j_q . Uma permutação é denominada *par* se o número total de inversões é par e, será denominada *ímpar* se o número total de inversões é ímpar.

O *sinal* da permutação σ_k , denotado por *sgn*(σ_k), será **+ 1** ou **–1**, conforme a permutação seja par ou ímpar.

Os exemplos a seguir esclarecem as definições:

a) (1 2 3) é par, devido não ter nenhuma inversão.
b) (3 1 2) é par, devido ter duas inversões [3 1 e 3 2].
c) (3 2 1) é ímpar, devido ter três inversões [3 2 , 3 1 e 2 1].
d) O sinal das permutações em S_3 são:

$$\text{sgn}(\sigma_1) = +\,1, \text{sgn}(\sigma_2) = -\,1, \text{sgn}(\sigma_3) = -\,1$$
$$\text{sgn}(\sigma_4) = +\,1, \text{sgn}(\sigma_5) = +\,1, \text{sgn}(\sigma_6) = -\,1$$

Seja a matriz A = $(a_{ij})_{nxn}$. Definimos o *determinante* de A, denota-se por det(A) ou por $|A|$, o número obtido por:

$$\det(A) = |A| = \sum_{k=1}^{n!} \text{sgn}(\sigma_k).a_{1\,\sigma_k(1)}.a_{2\,\sigma_k(2)}.a_{3\,\sigma_k(3)} \cdots a_{n\,\sigma_k(n)}$$

Desta forma podemos entender que existe uma aplicação f do conjunto das matrizes quadradas de ordem *n* (M_n) no conjunto dos números reais ($\Re$), de forma esquemática tem-se:

$f\colon M_n \to \Re$

$$f\left(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}\right) = \det(A_n) = |A_n|$$

$$f(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}) = \sum_{k=1}^{n!} sgn(\sigma_k).a_{1\,\sigma_k(1)}.a_{2\,\sigma_k(2)}.a_{3\,\sigma_k(3)} \cdots a_{n\,\sigma_k(n)}$$

$$f(A_n) = \sum_{k=1}^{n!} sgn(\sigma_k).a_{1\,\sigma_k(1)}.a_{2\,\sigma_k(2)}.a_{3\,\sigma_k(3)} \cdots a_{n\,\sigma_k(n)}$$

É possível conceber o exposto acima a partir das relações estabelecidas entre equações de sistemas lineares. Apresentamos essa perspectiva a partir da resolução genérica de um sistema linear a duas incógnitas, conforme sugere Fainguelert e Bordinhão (1980).

Para tanto, considere o sistema linear de duas equações e duas incógnitas:

$$\begin{cases} a_1 \quad x \quad + b_1 \quad y = \quad c_1 \\ a_2 \quad x \quad + b_2 \quad y = \quad c_2 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por $-a_2$ e a segunda equação por $+a_1$, obtém-se:

$$\begin{cases} -a_1a_2 \quad x \quad - a_2b_1 \quad y = \quad -a_2c_1 \\ +a_1a_2 \quad x \quad + a_1b_2 \quad y = \quad +a_1c_2 \end{cases}$$

Efetuando a soma membro a membro, obtém-se:

$$(a_1a_2 - a_1a_2).x + (a_1b_2 - a_2b_1).y = a_1c_2 - a_2c_1$$

Isolando a incógnita y tem-se:

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Procedendo de modo análogo, pode-se obter a incógnita x, a saber:

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2}$$

Se $a_1b_2 - a_2b_1$ é não nulo, o sistema de uma única solução.

Reescrevendo o sistema linear na forma matricial obtém-se:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

A matriz constituída com os coeficientes de x e y; associamos essa matriz a um número real que se obtém do seguinte modo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2$$

O resultado pode ser obtido a partir da aplicação das permutações do conjunto $S_2 = \{ (1 \;\; 2) \;,\; (2 \;\; 1) \}$, observado o sinal da permutação e o definido como determinante.

Substituindo as colunas das incógnitas x e y, individualmente, pela coluna dos termos independentes, obtém-se, respectivamente:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - b_1 c_2$$

e

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - c_1 a_2$$

Ressalta-se que os resultados obtidos também são obtidos a partir da lógica das permutações, observado o sinal destas.

Para $\Delta \neq 0$ resulta que:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} \qquad\qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

Comparando com o obtido anteriormente, na resolução do sistema ao isolarmos as incógnitas, conclui-se que o sistema linear possui solução única.

Observa-se que Δ é determinístico na solução do sistema linear e recebe a denominação de *determinante* do sistema linear.

O conceito de funcionalidades, transformação, pode ser aplicado a outros campos da matemática, sendo a geometria um excelente campo para resgatar e explorar esse conceito. No campo vetorial também temos situações diversas que podem ser associadas ao conceito funcional.

Sendo P o conjunto dos polígonos convexos, pode-se definir uma função f de P em $\Re$, que relaciona a soma dos ângulos internos de um polígono convexo ao número de lados desse polígono, ou seja; f: P $\rightarrow \Re$, definida por $f(n) = S_i = (n - 2).\ 180º$.

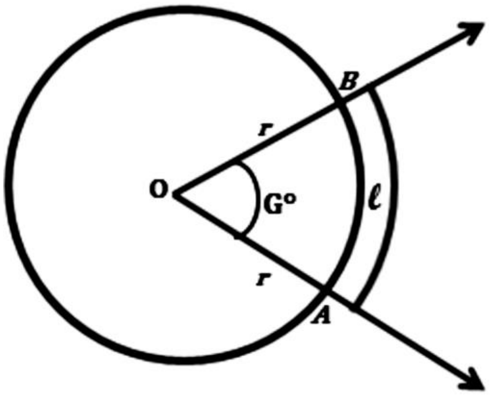
Por outro lado, sendo P’ o conjunto dos polígonos convexos regulares é possível estabelecer relações que determinam o ângulo interno e o ângulo externo a partir do número de lados do polígono, isto é:

$$f: P' \rightarrow \Re \qquad\qquad g: P' \rightarrow \Re$$

$$f(n) = a_i = \frac{180°(n-2)}{n} \qquad\qquad g(n) = a_e = \frac{360°}{n}$$

Além dos ângulos internos e externos também é possível determinar o número de diagonais de um polígono convexo, ou seja, consideremos f: P $\rightarrow \Re$, definida agora por $f(n) = d_n = \frac{n.(n-3)}{2}$.

Uma situação bem interessante que envolve o comprimento de arco de um setor circular, conforme indicado na figura a seguir, pode contribuir para consolidar os conceitos relacionados a dependência e independência das variáveis envolvidas.



Na figura estão representados a circunferência de raio r, o ângulo central $G°$, o arco $\widehat{AB}$ e a medida $\boldsymbol{\ell}$ desse arco. Por meio de uma regra de três simples obtém-se $\boldsymbol{\ell} = \frac{G°}{180°}$ (π.r). A partir dessa expressão pode-se discutir a variação da medida do comprimento do arco em função do ângulo $G°$, mantido o raio r fixo. Mas também é possível mostrar que a medida do comprimento de arco varia quando mantido fixado o ângulo $G°$ e o raio r da circunferência variar. Se α corresponde ao ângulo central $G°$, em radianos, a expressão que determina a medida $\boldsymbol{\ell}$ o comprimento arco $\widehat{AB}$ é dada por $\boldsymbol{\ell} = \alpha.r$.

Podemos determinar comprimento de uma circunferência em relação ao raio que a determina, para tanto, consideremos o conjunto C das circunferências de raio r e a função c definida por $c(r) = 2.\pi.r$, ou seja, consideremos a função c: C $\rightarrow \Re$, $c(r) = Comprimento = 2.\pi.r$.

Também podemos estabelecer uma relação entre o raio e a área de um disco (círculo) e, para tanto, consideremos o conjunto D dos círculos de raio r e a função a : D $\rightarrow \Re$, definida por $a(r) = Área = \pi.r^2$.

Os conceitos relacionados a função também podem ser explorados ao se abordar áreas, perímetros e volumes, dentre eles, o perímetro e a área associada ao quadrado de lado ℓ. Para tanto, consideremos o conjunto Q constituído pelos quadrados e as funções $p(\ell) = 4.\ell$ e $a(\ell) = \ell^2$, definidas de Q no conjunto dos números reais positivos, ou seja:

$$p : Q \to \Re \qquad a : Q \to \Re$$
$$p(\ell) = 4.\ell \qquad a(\ell) = \ell^2$$

No campo vetorial pode-se associar a cada elemento do conjunto V, constituído pelos vetores $\vec{v}$, o módulo (comprimento) desse vetor por meio da função f: V $\to \Re$, definida por $f(\vec{v}) = \|\vec{v}\|$.

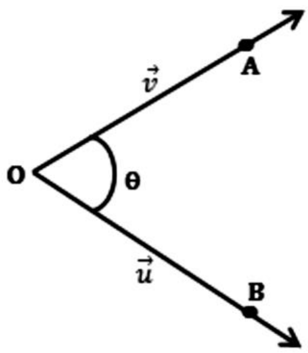
Ainda nesse conjunto V podemos definir as funções g e h:

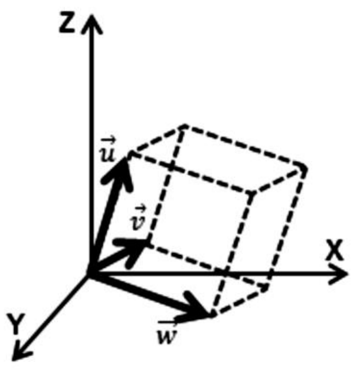
$$g: V \times V \to \Re \qquad h: V \times V \to V$$
$$g\big((\vec{u}, \vec{v}\,)\big) = \vec{u}\,.\vec{v} \qquad h\big((\vec{u}, \vec{v}\,)\big) = \vec{u} \times \vec{v}$$

As funções g e h transformam um par de vetores no produto escalar (produto interno) e produto vetorial, respectivamente, ou seja, as imagens do par ordenado de vetores $(\vec{u}, \vec{v}\,)$ ou é um número real ou é um vetor.

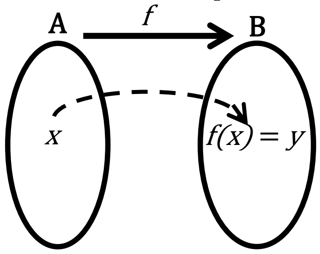
Também podemos estabelecer relações que associam dois vetores ao ângulo definido por estes, bem como, o módulo do produto misto entre três vetores e o volume do paralelepípedo formado por estes vetores.

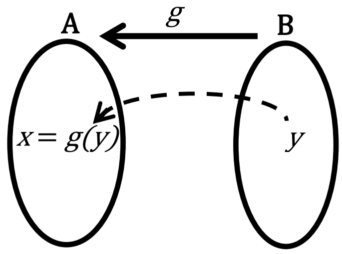
$$g: V \times V \to \Re \qquad h: V \times V \times V \to \Re$$
$$g\big((\vec{u}, \vec{v}\,)\big) = cos(\theta) = \frac{\vec{u}\,.\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.} \qquad h\big((\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\,)\big) = |\vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w})|$$





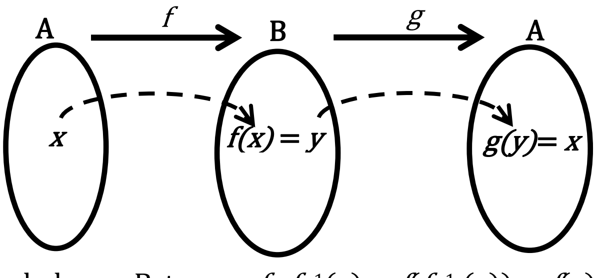
Sobre uma função f definida de A em B, diz que a função g, definida de B em A é a função inversa da função f quando para todo y $\in$ B, existe um $x \in$ A, tal que $g(y) = x$ e $f(x) = y$, o que equivale a dizer que para todo $(x, y) \in f$ tem-se $(y, x) \in g$ e a função g é denotada por f^{-1}. Observa-se que a função f só admitirá sua inversa quando esta for bijetora.



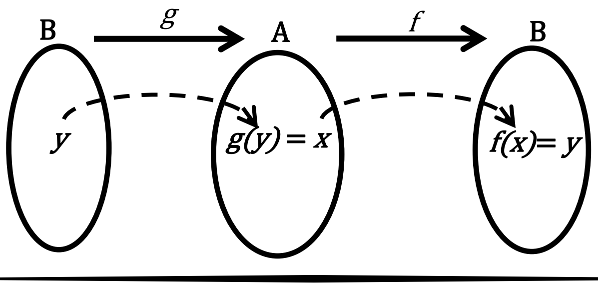


Decorre das estruturas algébricas que um elemento composto com o seu simétrico num grupo resulta o elemento neutro. No caso da composição de funções, em particular com suas inversas, temos que $f \circ f^{-1}$ e $f^{-1} \circ f$ resultam a função identidade, elemento neutro na composição de funções.

Considerando g a função inversa de $f(f^{-1})$, ressaltamos que dado $x \in$ A, tem-se que $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x = \mathrm{Id}(x)$. Em outras palavras, tem-se a função $f^{-1} \circ f : A \rightarrow A$, definida por $f^{-1} \circ f\ (x) = \mathrm{Id}_A(x)$, que é uma identidade em A.



Por outro lado, dado $y \in$ B, tem-se $f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y = \mathrm{Id}(y)$. Ou seja $f \circ f^{-1}: A \rightarrow A$, definida por $f \circ f^{-1}(y) = \mathrm{Id}_B(y)$, que é uma identidade em B.



Observa-se que as funções identidades decorrentes das composições estão definidas em conjuntos distintos, ou seja, $f^{-1}of(x) = Id_A(x)$, está definida de A em A e $fof^{-1}(y) = Id_B(y)$, está definida de B em B.

Os livros didáticos apresentam procedimentos para a obtenção da função inversa, que inclui no decorrer do processo a permuta das variáveis x e y, tendo em vista manter a variável x associada ao domínio da função. Entretanto, esse procedimento pode induzir ao erro, ou seja, pode induzir que o domínio das funções $f^{-1}of$ e fof^{-1} sejam os mesmos, fato evidenciado pelo exemplo a seguir:

$$f\colon \Re_- \to \Re_+, \text{ definida por } f(x) = -x$$
$$g\colon \Re_+ \to \Re_-, \text{ definida por } g(y) = -y$$

Onde fica claro que:

$$g \circ f : \Re_- \to \Re_-, \text{ definida por } Id(x) = x$$
$$f \circ g : \Re_+ \to \Re_+, \text{ definida por } Id(y) = y$$

Logo a permuta das variáveis pode induzir que $gof(x) = fog(\mathrm{x})$ e que estão definidas $\Re_-$ em $\Re_-$. De um modo geral esse problema não ocorre nos livros didáticos em função dos exemplos selecionados e da restrição quanto a abordagem conceitual.

Considerações Finais

Este livro, que serviu de base para o minicurso de mesmo título ministrado no I Simpósio Nacional sobre o Ensino e Pesquisa de Matemática no Contexto da Educação, Ciência e Tecnologia (I SINEPEM), teve como principal finalidade apresentar situações que podem gerar obstáculos no processo de ensino e de aprendizagem em Matemática, tendo em vista que a preocupação com o ensino e a aprendizagem da Matemática tem sido um tema constante nos congressos e encontros que reúnem profissionais da educação.

Aqui discutimos situações relativas as terminologias e ensino da matemática, não tivemos a intensão em transformar esse texto num rol de sugestões voltadas para diminuir o problema, agravado principalmente pelo fracasso dos alunos diante dessa disciplina, fato revelado nas últimas avaliações realizadas pelos órgãos governamentais.

Um dos focos está centrado no fato de que escrever na língua materna é uma das formas de interpretar, explicar e analisar o mundo, levando em consideração, também, que a Matemática é outra dessas formas construída ao longo da história que tem seus códigos e linguagem própria, além de um sistema de comunicação e de representação da realidade.

Procuramos destacar que a linguagem matemática desempenha um papel significativo dentro da própria Matemática, bem como, da cultura, mas, para sobreviver necessita do apoio da linguagem materna para a realização da comunicação.

Discutimos questões relacionadas ao analfabetismo matemático e sobre o processo de ensino que talvez esteja sendo alicerçado no trabalho mecânico e descontextualizado, em técnicas operatórias e na memorização de fórmulas e propriedades. As discussões apresentadas estão em consonância com as recomendações constantes nos documentos oficiais e buscam a adequação entre os conteúdos e as abordagens metodológicas.

Observa-se que há um esforço conjunto de pesquisadores e professores no sentido de elaborar, testar e propor metodologias alternativas nos diversos níveis de ensino, visando contemplar as habilidades e competências específicas de cada área.

Foi apresentada uma gama de definições que, de um modo geral, podem ser interpretadas de forma equivocada ou geram certa ambiguidade, como é o caso de funções. Os conceitos primitivos foram inseridos tendo em vista os equívocos apresentados por alunos em sala de aula, principalmente quando interpelam o professor. Outros exemplos dizem respeito às sequências numéricas aritméticas e geométricas e juro simples e composto, uma vez que alguns fazem associações às funções de domínios contínuos.

Um das nossas preocupações ao elaborarmos esse texto foi estabelecer a equidade entre as abordagens metodológicas alternativas e os conteúdos vistos com ênfase conceitual, objetivando geração de significados, sem deixar de lado o rigor que se faz necessário na apresentação do texto matemático.

Elegemos o conceito de função por sua centralidade e importância na formação do pensamento matemático, sobretudo pelas possibilidades de explorar um campo fértil de construção da linguagem matemática associada a linguagem materna.

Neste sentido foram apresentadas situações em diversos campos em que é possível fazer uso de funções para melhor esclarecer os conceitos envolvidos e correlacionar os diversos campos da Matemática, visto que tais situações podem gerar implicações desastrosas no processo de ensino e de aprendizagem.

A concepção geral deste texto foi propor reflexões sobre as contribuições de uma abordagem mais ampla dotada de rigor matemático que permita identificar a pertinência desse conceito (função), dando sentido e significado para um conjunto de objetos matemáticos que de um modo geral são abordados sem a ênfase funcional

Esperamos que esse texto, produzido para o minicurso I SINEPEM, possa gerar debates e incentivar os leitores à utilização correta das linguagens materna e matemática, utilizar as definições associadas às funções para apresentar alguns conceitos matemáticos e, assim, contribuir para a melhoria do processo de ensino e de aprendizagem da Matemática.

Além disso, espera-se que as reflexões oriundas deste texto contribuam para formação inicial e continuada de professore de Matemática e, por conseguinte, reflitam na melhoria dos processos de ensino e de aprendizagem nos diversos níveis, sobretudo, na Educação Básica.

BIBLIOGRAFIA REFERÊNCIADA E CONSULTADA

ALENCAR FILHO, Edgard. **Funções Aritméticas – Números Notáveis**. São Paulo: Nobel, 1988.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

BARTHÉLEMY, Georges. **2500 anos de Matemáticas**: A evolução das ideias. Coleção Horizontes Pedagógicos. Lisboa: Intituto Piaget, 1999.

BICUDO, M. A. V., GARNICA, A. V. M. **Filosofia da educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

BRAGA, Ciro. **FUNÇÃO**: a alma da matemática. São Paulo: Annablume; Fapesp, 2006.

BRANDÃO, Marcius. **Matemática conceituação moderna**. 4º vol. São Paulo: Ed. do Brasil S/A, 1964.

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: ensino médio. Brasília: MEC, 1999.

BRITO, M. R. F. Aprendizagem significativa e a formação de conceitos na escola. In: BRITO, M. R. F. (org.). **Psicologia da educação matemática**. Florianópolis: Insular, 2001.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Gradiva, 4a ed., 2002.

CARRAHER, et alli. **Na vida dez, na escola zero**. São Paulo: Cortez, 1988.

COSTA, Nielce M. Lobo da, **Funções Seno e Cosseno**: uma seqüência de ensino a partir dos contextos do "mundo experimental". Dissertação de mestrado em Ensino de Matemática. PUC- SP, 1997

COURANT, Richard & ROBIBINS, Herbert. **O que é Matemática?** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

DALCIN, Andréia. **Um olhar sobre o paradidático de Matemática**. Campinas, 2002. Dissertação de Mestrado. Unicamp.

D'AMBROSIO, U. **Da realidade à ação**: reflexões sobre educação e matemática. São Paulo: Summus, 1986.

Davis, P. J., Hersh, R. **A Experiência Matemática**. Lisboa: Gradiva, 1995.

DIEUDONNÉ, Jean. **A Formação da Matemática Contemporânea**. Trad.: J. H. von Hafe Perez. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1990.

DOMINGUES Hygino Hugueros. **Fundamentos de Aritmética**. Florianópolis (SC),: Ed. daUFSC, 2009.

DUCROT, O. **Provar e dizer**. São Paulo: Abril Cultural, 1979.

FROTA, M. C. R. **O pensar matemático no ensino superior**: concepções e estratégias de aprendizagem dos alunos. Belo Horizonte, 287p., 2002. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais.

GARBI, Gilberto Geraldo. **C. Q. D.** Explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

KASNER, Edward & NEWMAN, James. **Matemática e Imaginação**. Trad.: Jorge Fortes. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1976.

LAPA, Nilton et all. **Noções de Matemática**. São Paulo: Moderna, 1982.

LIMA, Elon lages et all. **A Matemática do Ensino Médio**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1997. V. 1, 2 e 3.

LIPSCHUTZ, Seymour. **Matemática Finita**. Coleção Schaum. São Pulo: McGraw-Hill do Brasil, 1772.

LORENZATO, S. **Para aprender matemática**. 2. ed. Campinas. Autores Associados, 2008.

MACHADO, Nilson José & CUNHA, Marisa Ortegosada. **Lógica e linguagem cotidiana**: verdade, coerência, comunicação, argumentação. Belo Horizonte (MG): Autêntica, 2005.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e língua materna**. São Paulo: Cortez, 1996, 1999, 2011.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, J. P., Brocardo, J., Oliveira, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

RABELO, Edmar Henrique. **Textos Matemáticos**: Produção, Interpretação e resolução de Problemas.

RIGHETTO, Armando & FERRAUDO, Antonio Sérgio. **Cálculo Diferencial e Integral**. São Paulo: IBEC, 1981.

SANCHEZ, J. N. G. **Dificuldades de Aprendizagem e Intervenção Psicopedagógica**. Porto Alegre: Artmed, 2004.

SANT'ANNA, Adonai S. **O que é um axioma**. Barueri (SP): Manole, 2003.

http://www.significados.com.br/hipotese/

Miguel Chaquiam – Natanael Freitas Cabral

DADOS SOBRE OS AUTORES

Miguel Chaquiam é Licenciado em Ciências pelo Centro de Estudos Superiores do Estado do Pará (1983), Licenciado em Matemática pelo Centro de Estudos Superiores do Estado do Pará (1984), Especialista em Matemática pela UNESPA (1989), Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Pará (2001) e Doutor em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN (2012). Atualmente é professor da Universidade da Universidade do Estado do Pará - UEPA. Professor no Ensino Superior há mais de 30 anos. Vinculado ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPEM) da Universidade do Estado do Pará (UEPA) e é Líder do Grupo de Pesquisa em História, Educação e matemática na Amazônia (GHEMAZ). Foi membro da Diretória da SBHMat (2015/2019) e Coordenador Científico do XIII Seminário Nacional de História da Matemática (XIII SNHM), realizado em Fortaleza (CE), no período de 14 a 17 de abril de 2019.

Natanael Freitas Cabral é possui graduação em Licenciatura em Ciências pela Universidade Federal do Pará (1985), Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Pará (1988) , Bacharelado em Teologia - Seminário Teológico Batista Equatorial (1994), e Mestrado em Educação em Ciências e Matemática pela Universidade Federal do Pará (2004). Doutorado em Educação pela PUC- Rio. Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Matemática. Atualmente ministra as disciplinas: Instrumentação I e II no curso de graduação em Licenciatura em Matemática na Universidade do Estado do Pará e Ensino de Matemática I e II no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (UEPA). Atualmente coordena o Laboratório de Educação Matemática - LABEM/UEPA e é Líder do Grupo de Pesquisa em História, Educação e matemática na Amazônia (GHEMAZ).

Coleção I - SINEPEM

Experimentos fatoriais completos.
Alessandro de Castro Corrêa.

Métodos matemáticos aplicados nas engenharias via sistemas computacionais.
Denis Costa
Heictor Alves de Oliveira Costa
Lucas Pompeu Neves

O uso da Álgebra na construção de códigos corretores de erros.
Maria de Nazaré Carvalho de Bezerra.

Funções: uso, desuso e reflexos sobre o ensino.
Miguel Chaquiam.
Natanael Freitas Cabral.

Atividades plurais com história da matemática em sala de aula.
Rita Sidmar Alencar Gil.

O uso da cartografia no ensino de matemática.
Maria Lúcia Pessoa Chaves Rocha.

Possibilidades do ensino de matemática por atividades.
Pedro franco de Sá.

Possibilidades metodológicas com o uso do Plickers e Kahoot.
Deusarino Oliveira Almeida Júnior.
José Messildo Viana Nunes.
Saul Rodrigo da Costa Barreto.

Desenvolvimento de aplicativos:
App inventor na formação do pensamento lógico e algébrico.
Demetrius Gonçalves de Araújo.
Fábio José da Costa Alves.
Fernando Cardoso de Matos.

GPS e suas aplicações.
Roberto Paulo Barbosa Ramos.

Impressora 3D: No IFPA campus Belém.
Arildomá Lobato Peixoto.

Inovação e patentes.
Laércio Gouvêa Gomes.

O Grupo Interdisciplinar para a Educação em Ciências e Matemática (GINEM), do Instituto Federal do Pará (IFPA), apresenta a 1ª Edição do Simpósio Nacional sobre Ensino e Pesquisa de Matemática no Contexto da Educação, Ciência e Tecnologia (SINEPEM), com vistas à difusão de pesquisas e produções acadêmicas de professores, estudantes e pesquisadores que atuam no campo da Matemática, Matemática Aplicada e da Educação Matemática.

No contexto da Educação, Ciência e Tecnologia, esta edição deverá subsidiar importantes discussões que permitirão traçar novos rumos e definir novas perspectivas para o Ensino e Pesquisa da Matemática nos Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia. O apoio financeiro da CAPES viabilizou esta publicação dos livros para os minicursos, que possibilitaram uma maior fundamentação e interação entre professores, pesquisadores e estudantes participantes.

Nesta primeira edição, a Coleção SINEPEM apresenta 12 volumes de livros distribuídos em três áreas do conhecimento: Educação, Ciência e Tecnologia, que buscam dar suporte e difundir os conhecimentos científicos sistematizados pelos professores e pesquisadores em forma de minicursos, ministrados no evento.

SBEM CAPES Sociedade Brasileira de Educação Matemática - Pará

INSTITUTO FEDERAL Pará | Campus Belém

ISBN 978-85-62855-95-5 (V. 4)
ISBN 978-85-62855-87-0 (Coleção)