

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Curso de Licenciatura em Física



Eliézer Afonso da Nóbrega

**Grandezas Conservadas No Campo
Escalar via Teorema de Noether**

Belém-PA

2022

Eliézer Afonso da Nóbrega

Grandezas Conservadas no Campo Escalar via Teorema de Noether

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciatura Plena em Física, do Centro de Ciências Sociais e Educação, da Universidade do Estado do Pará.

Orientador: Prof. Dr. Andrey Gomes Martins

Belém - PA

2022

Afonso da Nóbrega, Eliézer

Quantidades Conservadas no Campo Escalar Via Teorema de Noether.
/ Eliézer Afonso da Nóbrega, Orientador: Gomes Martins, Andrey - 2022.
84 p.

Trabalho de conclusão de curso - Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Curso de Licenciatura em Física, 28 de Agosto de 2022.

1. Teoria de partículas 2. Teoria de Campos 3. Teorema de Noether
I. Afonso da Nóbrega, Eliézer II. Gomes Martins, Andrey. III.
Universidade do Estado do Pará. IV. Quantidades Conservadas no Campo
Escalar Via Teorema de Noether

CDD 530: ed. 1

Eliézer Afonso da Nóbrega

Grandezas Conservadas no Campo Escalar via Teorema de Noether

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciatura Plena em Física, do Centro de Ciências Sociais e Educação, da Universidade do Estado do Pará.

Orientador: Prof. Dr. Andrey Gomes Martins

Data de aprovação: 18/08/2022

Prof. Dr. Andrey Gomes Martins

Orientador

Prof. Dr. Penn Lee Menezes Rodrigues

Examinador 1

Prof. Dr. Jarlesson Gama Amazonas

Examinador 2

Dedico este trabalho primeiramente a Deus que até aqui me ajudou, e aos meus pais, *Antônio Menezes* e *Maria Conceição*, meus incentivadores que tanto me apoiaram para a conclusão deste curso.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço ao meu senhor Deus, que me auxiliou, mesmo eu sendo imperfeito, mas que por seu Filho amado e sua obra restauradora eu posso ser grato, por mais que eu não seja capaz de oferecer-lhe nada em troca que pague o seu sacrifício por mim.

Agradecer aos meus pais, Maria Conceição e Antônio Meneses, que juntamente com meus irmãos me auxiliaram e me motivaram até concluir este curso, com ajuda em necessidades financeira para pegar os ônibus todos os dias, o necessário para que eu pudesse estar frequentando o curso presencialmente.

Digo que a minha motivação de cursar a faculdade de Física não foi uma das melhores para alguém que queira seguir uma carreira, inicialmente não era de meu interesse fazer um curso de licenciatura, mas com o tempo, aprender sobre os fenômenos físicos que nos cercam diariamente, desde a física do mundo macro até o mundo micro que não enxergamos me motivou a se aprofundar nesses assuntos para entendê-las e repassar esse conhecimento.

Muito disso se deve as aulas de professores excelentes, especialmente o professores Penn, com sua didática entusiasmada, sempre conectando a física à vida real, me lembrando que a física não é somente equações. Por outro lado, as aulas do professor Andrey, com um cuidado e aprofundamento matemático por trás das teorias físicas, me lembrando que a física descreve a natureza pela matemática. Isso me ajudou a ter uma visão equilibrada da física.

Também aos professores de ensino, Fred Bicalho e João Paulo, este último que além dos artigos, tinha as Pizzas no final das aulas, certamente vai deixar saudades. Por fim, aos meus amigos da sala sobreviveram a esse curso, os quais infelizmente não resta mais espaço para citá-los nominalmente.

*“O que sabemos é uma gota,
o que ignoramos é um oceano”*

Isaac Newton

Resumo

Neste trabalho tem por estudo as grandezas físicas conservadas no campo escalar real, o campo de Klein-Gordon, via teorema de Noether, com enfoque nas transformações infinitesimais e invariantes sob translações, rotações e *boosts*. Começamos por introduzir as leis de conservação e suas relações fundamentais com as simetrias e invariâncias dessas transformações, estudando-os pela Teoria de Grupos. Para definimos o Campo de Klein-Gordon neutro em que essas quantidades serão obtidas por meio do Teorema de Noether, é introduzido a Teoria de Campos, começando pela mecânica clássica discreta com os formalismos newtoniano e os formalismos lagrangiano e hamiltoniano, juntamente com o princípio de Hamilton, para em seguida generalizar para a mecânica do contínuo. Com o auxílio do cálculo variacional, finalmente o teorema de Noether é definida para campos. Desta forma, definida o campo de Klein-Gordon, com sua equação dinâmica e energia própria, e o teorema de Noether, esses resultados irão nortear na obtenção das quantidades conservadas para as transformações infinitesimais e invariantes.

Palavras-chave: Física de Partículas; Leis de Conservação; Grupo de Poincaré; Simetrias; Teorema de Noether; Teoria de Campos; Campo de Klein-Gordon neutro.

Abstract

In this work we study the physical quantities conserved in the real scalar field, the Klein-Gordon field, via Noether's theorem, focusing on infinitesimal and invariant transformations under translations, rotations and *boosts*. Starting by introducing the conservation laws and their fundamental relationships with the symmetries and invariances of these transformations, studying them through Group Theory. In order to define the neutral Klein-Gordon field in which these quantities will be obtained through Noether's Theorem, Field Theory is introduced, starting with discrete classical mechanics with Newtonian formalisms and Lagrangian and Hamiltonian formalisms, together with the principle of Hamilton, and then generalize to continuum mechanics. With the help of variational calculus, finally Noether's theorem is defined for fields. Thus, having defined the Klein-Gordon field, with its own dynamic equation and energy, and Noether's theorem, these results will guide the obtainment of conserved quantities for infinitesimal and invariant transformations.

Keywords: Particle Physics; Conservation Laws; Poincare Group; Symmetries; Noether's Theorem; Fields Theory; Neutral Klein-Gordon field.

Conteúdo

Notações	2
Introdução	3
1 Teoria de Grupos	6
1.1 Grupos de Lie	8
1.2 Grupo de Rotações	12
1.3 Grupo de Lorentz	15
1.4 Grupo de Poincaré	19
2 Mecânica Clássica	24
2.1 Formalismo Newtoniano	24
2.2 Cálculo Variacional: Princípio de Hamilton	26
2.3 Formalismos lagrangiano e hamiltoniano	29
3 Teoria de Campos	36
3.1 Passagem para o Contínuo	37
3.2 Campos Clássicos	42
3.3 Campo Escalar Real de Klein-Gordon	43
4 Leis de Conservação e o Teorema de Noether	51
4.1 Teorema de Noether	53
4.1.1 Quadridivergência	54
4.1.2 Corrente de Noether	57

5	Quantidades Conservadas	59
5.1	Translações Espaço-Tempo	60
5.1.1	Energia Conservada	62
5.1.2	Conservação do Momento Lienar	63
5.2	rotações e <i>Boosts</i>	64
5.2.1	Conservação do Momento Angular	66
5.2.2	Conservação da Quantidade Conservadas de <i>Boosts</i>	67
	Conclusão	70
	Bibliografia	74

Notações

No decorrer deste trabalho, são empregadas notações e abreviações necessárias para a exposição dos assuntos tratados. Para simplificar as equações físicas, é introduzido o sistema de unidades naturais, usadas na mecânica quântica e na relatividade geral, em que as constantes fundamentais assumem o valor unitário. Duas constantes que estarão nas equações exaustivamente, a constante de *Planck* e principalmente a velocidade da luz, assumirão o valor:

$$\hbar = c = 1$$

As equações com notação indicial, muito usuais na relatividade geral, são comumente usadas com os índices μ e ν que assumem os valores de 0 a 3, e que o índice $\mu = \nu = 0$ é a coordenada temporal e que os demais números são as espaciais. Para a notação de índices que varia de 1 a 3, usual no espaço euclidiano, é geralmente denotado como i, j, k . Reunindo essas definições, temos:

$$\begin{aligned}\mu, \nu &= 0, 1, 2, 3 \\ i, j, k &= 1, 2, 3\end{aligned}$$

Além dos índices, teremos para métricas de espaço a métrica do espaço relativístico dado pela matriz $g^{\mu\nu}$, cuja assinatura é $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$, chamado de contravariante (para a covariante $g_{\mu\nu}$, a métrica é $\text{diag}(1, +1, +1, +1)$) que será adotada para este trabalho. Baseado nessas convenções, para a notação de derivadas parciais ou operadores diferenciais (já adotando o sistema de *unidades naturais*), para contravariante e covariante respectivamente

$$\partial/\partial x^\mu \equiv \partial_\mu, \quad \partial/\partial x_\mu \equiv \partial^\mu$$

onde $\partial/\partial x^0 = \partial/\partial x_0$ e a derivada temporal $\partial/\partial t$ e $\vec{\nabla}$ é a parte derivada espacial $\partial/\partial \vec{r}$, de maneira que:

$$\partial_\mu = \left(\partial_0, -\vec{\nabla} \right), \quad \partial x^\mu = \left(\partial x^0, \vec{\nabla} \right)$$

e que os covariantes e contravariantes diferenciais se relacionam pela métrica como:

$$\partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu, \quad \partial_\mu = g_{\mu\nu} \partial^\nu$$

O operador d'Alambertiano é a generalização do laplaciano na métrica de Minkowski, o qual é definido por

$$\square = \partial^\mu \partial_\mu$$

ou de uma outra forma escrevemos

$$\square = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \vec{\nabla}^2 \right)$$

Outras notações:

- Comutadores

$$[A, B] = AB - BA$$

- Complexo Conjugado

*

No decorrer deste trabalho, perceberemos o uso frequente de operadores, que são essenciais na formulação da mecânica quântica. Mesmo que este trabalho se atenha na mecânica clássica, os operadores serão importantes na interpretação das grandezas físicas, os quais são:

$$E = i \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} = -i \frac{\partial}{\partial \vec{r}}, \quad L = -i(r \times \vec{\nabla})$$

os quais são respectivamente os operadores de Energia, Momento e Momento Angular.

Introdução

Para validar uma teoria física que se propõe a descrever a natureza, ela deve obedecer leis que dão “garantia” dessa validação, essas leis aqui referidas são as leis de conservação. De grande importância para a física, as leis de conservação são consideradas leis fundamentais da natureza, e não apenas possuem ampla aplicação na física e suas ramificações, mas também em outras áreas de estudo, como biologia e química. Como exemplo, uma das leis mais importantes e conhecidas da natureza é o postulado de *Lavoisier*, que afirma: *Nada se cria, nada se perde, tudo se transforma*. Este postulado é a lei da conservação das massas, que pode ser constatado nas reações inorgânicas em que temos dois reagentes resultando no produto, sendo que a massa antes e depois da reação é a mesma.

Na Física, as Leis de conservação nos dão grandezas conservadas, conhecidas também como grandezas invariantes, que basicamente são quantidades que permanecem inalteradas após um sistema físico sofrer uma transformação invariante. Exemplos de grandezas conservadas como o Momento Linear, Momento Angular e Energia, as mais recorrentes da mecânica clássica, tem que suas respectivas leis de conservação são as mais usadas para a validação de uma teoria física. Outras leis fundamentais de conservação podem ser adicionadas, como a lei de conservação de carga, de *isospin* e suas generalizações. Essa invariância das grandezas físicas, são consequências naturais de uma propriedade chamada de *simetria*, presente em um sistema físico. Sendo assim, temos uma relação das leis de conservação com simetrias naturais (GREINER; REINHARDT, 2013). Essa relação fundamental, antes vista praticamente como um axioma, foi elucidada de forma quantitativa pelo teorema de Noether.

Introduzida a simetria, e dada a sua importância nas leis de conservação, para ficar mais claro, devemos definir o que é simetria dentro do contexto da física. Antes, passamos a definir o conceito do termo em si. Uma simetria se caracteriza por ser simétrico,

com uma igualdade de diferentes pontos de um objeto equidistantes. Assim, nada mais é que uma relação de paridade, de harmonia em par, ou mesmo de uma analogia. Essa definição é mais matemática, pois leva em consideração forma e posição relativa de partes situadas em lados opostos de uma linha ou plano médio. Ou ainda que se acham distribuídas em volta de um centro ou eixo. Na física, essa “igualdade” é quanto a constância das grandezas após uma transformação (COXETER, 1973).

O matemático alemão Hermann Weyl forneceu uma boa definição de simetria, que diz, em essência, que um objeto é simétrico se houver algo que possamos fazer a ele tal que depois que o fizermos, ele se pareça o mesmo que antes (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 2008a). Um exemplo pode ser feito com uma esfera branca, que depois de gira-la, não é possível determinar se a esfera passou por alguma transformação. Trazendo para a Física, diz que um sistema tem uma simetria quando esse sistema, sujeito a uma mudança, permaneça exatamente como era antes da transformação, ou seja, invariante (MOREIRA, 2019). De forma geral, simetrias referem-se ao conjunto de transformações que levam uma expressão a ser invariante na sua forma, sendo invariante sob aquela transformação ou que ele apresenta uma simetria no parâmetro da transformação (MARTINS, 1999).

Neste estudo, seguiremos apresentando as relações das quantidades conservadas com as transformações em que um sistema físico é submetido. Veremos que esses conjuntos de transformações podem ser classificadas em grupos, sendo necessário introduzir a Teoria de Grupos, que se mostra ser muito útil para físicos. Para um grupo de transformações contínuas, teremos que eles obedecem uma matemática chamada de álgebra de Lie, ou Grupo de Lie. Essa álgebra irá nos auxiliar na obtenção das grandezas conservadas para cada grupo de transformação, por meio do chamado geradores infinitesimais. O grupo de interesse nesse trabalho é o grupo de Poincaré, que leva consigo as transformações de translações, rotações e *boosts*, nos dando dez grandezas conservadas ao todo. O objetivo geral deste trabalho é obter essas mesmas grandezas conservadas por meio do teorema de Noether, dentro do contexto do campo escalar. Antes, é necessário preparar o caminho até chegar na finalidade deste estudo.

Tendo a relação das grandezas conservadas com as simetrias físicas, e com o objetivo de se chegar nas grandezas conservadas no campo escalar, é necessário introduzir a Teoria de Campos, apresentada de forma gradual e didática, começando pela mecânica clássica do caso discreto, com os formalismo newtoniano, lagrangiano e hamiltoniano,

juntamente com o princípio de Hamilton, para posteriormente ser generalizado para o caso da mecânica do contínuo. Os formalismos serão importantes para o desenvolvimento do trabalho. O formalismo lagrangiano, por exemplo, é usualmente usado para descrever a dinâmica de um campo físico, enquanto que o hamiltoniano é associado a energia do mesmo. Na teoria de campos, dentre os campos físicos que se estuda, o campo escalar é o campo mais simples, também conhecido como campo de Klein-Gordon, o qual descreve a dinâmica dos bósons, partículas de spin inteiro, mas que nesse caso são partículas de spin zero. A teoria de campos, por ser uma frente de estudo mais abrangente do que a mecânica discreta, vai introduzir conceitos que auxiliarão na formalização do teorema de Noether na sua forma geral, para depois obtermos as dez grandezas conservadas apresentadas do grupo de Poincaré. Por fim, o trabalho será finalizado com conclusão e perspectivas.

Capítulo 1

Teoria de Grupos

Conforme apresentado na introdução, dada uma invariância de um sistema físico após uma transformação, é dito que há uma simetria natural presente no sistema, e que, por consequência, existe uma lei de conservação atrelada a ela. Sabemos que há uma relação fundamental entre uma simetria com uma grandeza conservada. Teremos que essas transformações que denotam simetrias e invariâncias podem ser entendidos como grupos para cada tipo de operações de transformação (FURTADO; HELAÏEL-NETO, 2020). Esses grupos são a ferramenta matemática que facilita no entendimento de simetrias e invariância, além da formalização e unificação com princípios e leis usadas na física (ARFKEN; WEBER, 2007).

Para facilitação do entendimento, na geometria euclidiana o produto escalar entre dois vetores é invariante sob transformações de translações ou rotações, e essas simetrias são características dessa geometria. No espaço relativístico, o intervalo (análogo ao produto escalar do espaço euclidiano) também é invariante sob transformação de Lorentz, sendo essas as simetrias do espaço. Por isso, antes de tratar o tema principal, um breve estudo sobre Teoria de grupos é importante para iniciar este trabalho para verificação e validação das teorias que serão abordadas.

A teoria de Grupos, de maneira geral, estuda conjuntos algébricos que formam grupos, que nada mais são que um conjunto de elementos que obedecem operações matemáticas e axiomas. Exemplos de grupos na física são os grupos de Lorentz e Poincaré, que serão abordados mais adiante. Os grupos com transformações contínuas são denominados grupo de Lie, uma ramificação da teoria que irá nos auxiliar no desenvolvimento

desse estudo, inclusive, nos grupos de Lorentz e Poincaré, que nos interessam para o prosseguimento deste trabalho.

Para entender melhor a noção de grupo, estabelecemos as propriedades que formam um grupo. Definimos um grupo como um conjunto de elementos que são objetos ou operações, rotações e transformações, e que podem ser combinadas entre si e resultar em elementos do próprio grupo. Para introduzir as propriedades que formam um grupo, assumiremos a transformação que vai ser a operação de multiplicação, representado por \odot . Definimos o grupo \mathbb{G} com os seus elementos:

$$\mathbb{G} = \{a, b, c, \dots\} \quad (1.1)$$

nas condições de:

- Fechamento

$$\{a, b\} \in \mathbb{G} / (a \odot b) = c \Rightarrow c \in \mathbb{G}$$

- Associatividade

$$\{a, b, c\} \in \mathbb{G} \therefore (a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$$

- Elemento unitário

$$\{e, a\} \in \mathbb{G} \Rightarrow e \odot a = a \odot e = a$$

- Elemento inverso

$$\{a, a^{-1}\} \in \mathbb{G} \Rightarrow a \odot a^{-1} = a^{-1} \odot a = 1$$

A comutatividade entre os elementos de grupo nem sempre será válida, pois geralmente a ordem dos elementos importa, ou seja, $a \cdot b \neq b \cdot a$. Para casos em que os resultados destas operações iguais, chamamos de grupo abeliano ou comutativo. Caso os resultados sejam diferentes, é dito que é um grupo não-abeliano ou não comutativo.

1.1 Grupos de Lie

Grupos que contém elementos caracterizados por um número r de parâmetros contínuos e reais, denotados por α_i , são denominados grupos contínuos, e se as funções dos parâmetros são analíticas¹, dizemos que é um grupo de Lie. Desta forma, um grupo de Lie é um grupo contínuo onde os elementos são descritos por funções de parâmetros que possuem derivadas de todas as ordens neste parâmetro. Os elementos de um grupo de Lie pode ser escritos como

$$g(\alpha) = e^{i\alpha_r \mathcal{X}_r} \quad (1.2)$$

onde $r = 1, 2, \dots, N$ e α_r são os parâmetros contínuos. A quantidade \mathcal{X}_r são os geradores infinitesimais, é através delas que as informações de um grupo de Lie podem ser obtidas, conhecendo assim a sua estrutura do grupo (BASSALO; CATTANI, 2008).

O geradores infinitesimais são funções que realizam transformações infinitesimais, fazendo com que fosse reduzido o estudo de grupo inteiro a um estudo dos elementos do grupo na vizinhança do elemento de identidade, satisfazendo uma álgebra de comutação. Para mostrar essas propriedades de grupos contínuos, partiremos da seguinte definição: Seja a transformação de coordenadas e parâmetros:

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) = f_i(x_n; \alpha_r) \quad (1.3)$$

em que $i = 1, 2, \dots, n$ e x' e x são n coordenadas de antes e depois das transformações respectivamente. Para definirmos f_i infinitesimal, começaremos por

$$x'_i = x_i + dx_i \quad (1.4)$$

de maneira que para (1.3):

$$x'_i = f_i(x'_1, x'_2, \dots, x'_n; \delta\alpha_1, \delta\alpha_2, \dots, \delta\alpha_r) = f_i(\bar{x}_i, \delta\bar{\alpha}_r) \quad (1.5)$$

Desta forma, podemos enunciar o diferencial de x_i aplicando a série de Taylor

$$dx'_i = \sum_{j=1}^r \left. \frac{\partial f_i(x_i, \alpha_i)}{\partial a_j} \right|_{\alpha=0} \delta\alpha_j \quad (1.6)$$

¹Analíticas no sentido de possuírem derivadas de todas as ordens, desenvolvidas via série de Taylor.

Para uma função qualquer $F(x)$ que, de forma análoga à variação da coordenada x , sofre uma transformação infinitesimal, $F' = F + \delta F$, definimos

$$dF = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F'}{\partial x_j} dx' \quad (1.7)$$

Usando a definição de (1.6) nesta nova transformação, teremos:

$$dF = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F'}{\partial x_j} \left(\sum_{j=1}^r \frac{\partial f_j}{\partial a_j} \delta \alpha_k \right) = \sum_{k=1}^n \delta \alpha_k \left(\sum_{j=1}^r \frac{\partial f_j}{\partial a_j} \Big|_{\alpha=0} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) F = -i \sum_{k=1}^r \delta a_k \mathcal{X}_k F \quad (1.8)$$

A quantidade entre parêntese é definida como

$$\mathcal{X}_k = i \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial a_k} \Big|_{\alpha=0} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (1.9)$$

Assim, temos que o \mathcal{X}_k são os *geradores* do grupo de Lie que geram as transformações infinitesimais, por isso *geradores infinitesimais*. Nota-se que o número de geradores é igual ao número de parâmetros infinitesimais. Desta forma, para $F' = F + dF$ fica

$$F' = F + \sum_{k=1}^r \delta a_k \mathcal{X}_k F = \left(1 + \sum_{k=1}^r \delta a_k \mathcal{X}_k \right) F \quad (1.10)$$

Portanto, para cada grupo de Lie é associado uma álgebra que captura completamente a estrutura local do grupo. De uma forma mais clara, um grupo dotado de operação de comutação entre seus geradores infinitesimais nos fornece uma relação entre seus elementos com uma álgebra que se baseia em comutação entre os geradores, chamada de álgebra de Lie. Assim sendo;

$$[\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_j] = C_{ij}^k \mathcal{X}_k \quad (1.11)$$

onde $i, j, k = 1, 2, \dots, r$ e as quantidades C_{ij}^k são constantes denominados constantes de estrutura do grupo. Quando o comutador entre dois elementos de um grupo de Lie produz outro elemento do mesmo grupo, dizemos que é um grupo cuja álgebra é fechada. Do contrário, quando o comutador entre um conjunto de elementos satisfazem todas as propriedades de um grupo, mas o comutador não é fechado, o conjunto não forma um grupo.

Exemplo 1

Seja uma rotação no sentido anti-horário em torno do eixo z no espaço \mathbb{R}^3 , que faz um ângulo θ , fazendo com que a base (x, y) se transforme em uma nova base (x', y') , e que as matrizes que representam essa rotação definem um grupo abeliano (que será provado a seguir), $O(2)$. As projeções das coordenadas é dado por

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta\end{aligned}\tag{1.12}$$

Inserindo uma notação em que $x \equiv x_1$ e $y \equiv x_2$, podemos escrever em uma notação matricial

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\tag{1.13}$$

onde a matriz pode ser escrita em uma forma mais compacta

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}\tag{1.14}$$

Para demonstrar que o conjunto de matrizes $R(\theta)$ satisfaz as condições de grupo pela multiplicação usual, verificando cada propriedade que denota ser um grupo. Definimos:

$$\begin{aligned}R(\theta_2) \odot R(\theta_1) &\equiv R(\theta_2)R(\theta_1) \\ &= R(\theta_2 + \theta_1)\end{aligned}$$

Dado esse resultado, podemos verificar as propriedades de grupo. Para as condições de:

- **Fechamento**

$$R(\theta_2)R(\theta_1) = R(\theta_2 + \theta_1) \equiv R(\theta_3)$$

- **Associatividade:**

$$R(\theta_3)[R(\theta_2)R(\theta_1)] = [R(\theta_3)R(\theta_2)]R(\theta_1)$$

- **Elemento Unitário:**

$$R(0)R(\theta) = R(\theta)R(0) = R(\theta)$$

- **Elemento Inverso:**

$$R(-\theta)R(\theta) = R(\theta)R(-\theta) = 0$$

na condição de que $R(\theta_3)$ pertença ao grupo, $R(0)$ é uma matriz identidade de segunda ordem e que $R(-\theta)$ é uma transformação inversa de (1.14).

Provado que satisfaz às condições para ser um grupo por meio do produto usual de matrizes, para obter a álgebra de Lie desse grupo, definirmos uma transformação infinitesimal, onde

$$\cos \theta \approx 1, \quad \sin \theta \approx \theta \quad (1.15)$$

em que θ é um parâmetro infinitesimal. As equações de (1.12) ficam

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + x_2\theta \\ x'_2 &= -x_1\theta + x_2 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Assim temos as equações que denotam uma rotação sob um ângulo $\delta\theta$ escrito em termos de escalares que representam as coordenadas nos dois sistemas de referência. Podemos obter as mesmas equações usando o gerador infinitesimal dado em (1.9). Sabendo que o parâmetro dessa transformação é θ , definimos o gerador associado a ele utilizando as equações (1.16). Resolvendo:

$$\mathcal{X}_z = i \sum_{j=1}^2 \frac{\partial x'_j}{\partial \theta} \bigg|_{\theta=0} \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial x'_1}{\partial \theta} \bigg|_{\theta=0} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x'_2}{\partial \theta} \bigg|_{\theta=0} \frac{\partial}{\partial x_2} = -i \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \quad (1.17)$$

Usando a expressão (1.10) para termos as equações após a transformada, teremos para cada componente:

$$\begin{aligned} dx_1 &= \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \theta x_1 = x_2 \theta \\ dx_2 &= \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \theta x_2 = -x_1 \theta \end{aligned}$$

e que podemos escrever:

$$\begin{aligned} dx_1 &= x'_1 - x_1 = x_2\theta \\ dx_2 &= x'_2 - x_2 = -x_1\theta \end{aligned} \tag{1.18}$$

o qual são os mesmos resultados das equações (1.16). Assim temos que o gerador nos deu as equações de rotação. Mais adiante, o estudo de rotações será mais aprofundado.

1.2 Grupo de Rotações

De maneira semelhante ao exemplo 1, será feito agora a demonstração para casos de um conjunto de rotações em $\mathbb{R}(3)$. Para cada eixo, as rotações serão representados pelos ângulos de Euler, a saber, ϕ, ψ , e θ . Para obter os elementos de grupo, será feito mediante o produto usual de matrizes, dado por $O(3)$. As matrizes de rotações são dadas por

$$R_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

$$R_y(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.21}$$

Como as rotações de direções diferentes não comutam, este grupo é não-abeliano. Além disso, por ter os parâmetros dados pelos ângulos de Euler, o grupo de rotação é um grupo de Lie, tendo assim três geradores, uma para cada parâmetro. Considerando a variação infinitesimal dada em (1.15) para os ângulos de Euler e associando as relações lineares ao

número complexo² por conveniência, teremos:

$$R_x(\delta\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i\delta\phi \\ 0 & -i\delta\phi & 1 \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

$$R_y(\delta\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i\delta\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ i\delta\psi & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

$$R_z(\delta\theta) = \begin{pmatrix} 1 & i\delta\theta & 0 \\ -i\delta\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

onde podemos reescrever em uma forma mais compacta

$$R_x = \mathbb{I}_3 + M_x \delta\phi \quad (1.25)$$

$$R_y = \mathbb{I}_3 + M_y \delta\psi \quad (1.26)$$

$$R_z = \mathbb{I}_3 + M_z \delta\theta \quad (1.27)$$

onde a quantidade \mathbb{I}_3 é uma matriz identidade de terceira ordem e as quantidade M_i são os geradores das rotações infinitesimais para o caso de variação infinitesimal, definidas até a primeira ordem:

$$M_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad M_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_z = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

As informações do grupo podem ser dadas pela álgebra de Lie,

$$[M_i, M_j] = i\epsilon_{ijk} M_k \quad (1.29)$$

²A correspondência das equações lineares presentes na matrizes para o número complexo é dado por

$$\cos t \pm i \sin t = e^{\pm it}$$

e desta forma reescrevemos as equações.

de maneira que o comutador de dois elementos do grupo de rotações nos gera outro elemento do grupo. No caso, o comutador entre os geradores de x e y nos dá o gerador z . Nota-se que o tensor levi-civita é a constante de estrutura de grupo.

Como validação desses resultados, os geradores podem ser obtidos utilizando a definição do gerador infinitesimal (1.9),

$$M_j = -i \left. \frac{dR_j}{d\varphi_j} \right|_{\varphi=0}, \quad (1.30)$$

onde φ_i são os ângulos de Euler como parâmetros infinitesimais das rotações, se resolvidas, teremos os geradores (1.28) das transformações de rotações.

Para o caso de transformações diretas nas coordenadas (na forma de escalares), como foi feito no exemplo 1, os geradores são obtidos usando a equação para coordenadas infinitesimais (1.17), o qual nos serão dados por:

$$L_x = -i \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad L_y = -i \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad L_z = -i \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (1.31)$$

Assim, podemos identificar que as transformações de cada rotação podem ser obtidas por meio de um produto vetorial das quantidades vetoriais \vec{r} e $\vec{\nabla}$:

$$L = -i(\vec{r} \times \vec{\nabla}) = -i \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

e que o $\vec{L} = -i(\vec{r} \times \vec{\nabla})$ é o operador do momento angular (lembrando da notação onde considera-se $\hbar = 1$), ou seja, os geradores responsáveis pelas rotações são as componentes do vetor momento angular. A álgebra de grupo é dado por:

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k \quad (1.33)$$

demonstrando ser um grupo não abeliano, com elementos não-comutativos.

1.3 Grupo de Lorentz

O estudo da relatividade restrita se dá em um espaço quadridimensional que o diferencia da mecânica euclidiana. A localização de um evento físico é dada não somente pela posição espacial, mas também pelo instante em que ele ocorre. O conjunto de todos os elementos do espaço e do tempo nos dá um espaço contínuo, chamado de *espaço-tempo de Minkowski*. Como toda validação de teoria física, as leis devem ser covariantes para diferentes referenciais. Na relatividade restrita, devido a invariância da velocidade da luz c , as leis físicas são covariantes por meio de transformações que relacionam a posição do evento e outras grandezas físicas observadas entre referenciais que se deslocam em movimento uniforme. Essas transformações são as transformações de Lorentz, caracterizadas pela introdução do fator de Lorentz, γ . De modo semelhante a rotações tridimensionais, em que o produto escalar de dois vetores é invariante, o intervalo³ entre dois eventos também deve ser invariante, (GOMES, 2015; TIPLER; LLEWELLYN, 2014).

Para prosseguimento do estudo, será introduzido a notação usual para vetores e tensores do espaço de Minkowski. Para o quadrivetor⁴ que dá a posição de um evento, por exemplo, pode ser dado respectivamente pela representação contravariante e covariante:

$$x^\mu = (ct, \vec{r}) \quad (1.35)$$

$$x_\mu = (ct, -\vec{r}) \quad (1.36)$$

As coordenadas correspondentes ao tempo, x^0 e x_0 foram dimensionalmente equiparadas com as demais dimensões x^i e x_i , multiplicando com c .

As transformações de Lorentz, para um movimento unidimensional (vamos con-

³O intervalo é o produto escalar relativístico das representações dos quadrivetores (?) e (?), que dá

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d(x^0)^2 - d(x^1)^2 - d(x^2)^2 - d(x^3)^2 \quad (1.34)$$

o qual é invariante, de maneira que defimos, $ds'^2 = ds^2$

⁴O termo para um vetor em um espaço de quadridimensional é convencionado como quadrivetor

siderar o movimento em x) são dadas por

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(t - vx) \\ x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{1.37}$$

onde:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{1.38}$$

em que $\beta = v/c$. Para $v \ll c$ as transformações de Lorentz se reduzem às transformadas de Galileu. A forma matricial das transformadas de Lorentz é dado por

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{1.39}$$

ou em uma forma mais compacta:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{1.40}$$

A matriz que descreve a transformação é chamada de *boost*. Desta forma podemos classificar os *boosts* que forma o grupo do tipo $O(1, 3)$ nas transformações em direções de x , y e z , definidos respectivamente:

$$\Lambda_x(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\beta_1\gamma_1 & 0 & 0 \\ -\beta_1\gamma_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.41}$$

$$\Lambda_y(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \gamma_2 & 0 & -\beta_2\gamma_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta_2\gamma_2 & 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.42}$$

$$\Lambda_z(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \gamma_3 & 0 & 0 & -\beta_3\gamma_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_3\gamma_3 & 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

Essas transformações do espaço de Minkowski são os chamados *boosts*. Apesar de não serem rotações, os *boosts* podem ser pensados como rotações, pois utilizando a definição do fator de Lorentz (1.38) como:

$$\gamma^2 - \beta\gamma^2 = 1 \quad (1.44)$$

e comparando com a identidade $\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$ teremos

$$\begin{aligned} \gamma &= \cosh \theta \\ \beta\gamma &= \sinh \theta \end{aligned} \quad (1.45)$$

Assim, podemos escrever as matrizes de modo semelhante às rotações pelos ângulos de Euler:

$$\Lambda_x(\phi) = \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi & 0 & 0 \\ -\sinh \phi & \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

$$\Lambda_y(\psi) = \begin{pmatrix} \cosh \psi & 0 & -\sinh \psi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sinh \psi & 0 & \cosh \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

$$\Lambda_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cosh \theta & 0 & 0 & -\sinh \theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \theta & 0 & 0 & \cosh \theta \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

Para transformações infinitesimais dos parâmetros (ângulos de Euler) dadas em (1.15), podemos obter matrizes semelhantes às matrizes de rotações espaciais, mas em um espaço quadridimensional, no espaço de Minkowski. Escrevendo na forma compacta

$$\Lambda_x = \mathbf{I}_4 + B_x \delta\phi \quad (1.49)$$

$$\Lambda_y = \mathbf{I}_4 + B_y \delta\psi \quad (1.50)$$

$$\Lambda_z = \mathbf{I}_4 + B_z \delta\theta \quad (1.51)$$

em que B são os geradores desse espaço

$$B_x = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.52)$$

A álgebra de Lie do grupo de Lorentz nos dá elementos que não pertencem a álgebra dos *boosts*, mas que pertencem ao grupo de rotações. Um exemplo é o comutador dos geradores B_x e B_y que nos dá o gerador de rotações em z :

$$[B_x, B_y] = B_x B_y - B_y B_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & M_z & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (1.53)$$

ou seja, temos que a álgebra dos geradores de *boosts* nos gera elementos que não fazem parte dessa álgebra. Os elementos gerados são geradores de rotações espaciais, inseridos no espaço quadridimensional. Desta forma, pela relação dos geradores do comutador, as transformações de *boosts* não formam um grupo. Temos então, que os geradores do grupo de rotações definidas pelos comutadores se relacionam com os geradores de *boosts* como:

$$[B_i, B_j] = -i\epsilon_{ijk} M_k \quad (1.54)$$

$$[B_i, M_j] = i\epsilon_{ijk} B_k \quad (1.55)$$

De forma análoga ao exemplo 1, tomando a representação escalar das quantidades,

teremos que os geradores infinitesimais são:

$$K_x = -i \left(t \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial t} \right), \quad K_y = -i \left(t \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial t} \right), \quad K_z = -i \left(t \frac{\partial}{\partial z} + z \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad (1.56)$$

os quais são as componentes do centro de massa, que é a quantidade conservada da transformação. Isso é definido com base nas definições dos operadores do momento $P = i\vec{\nabla}$ e energia $E = i\partial_t$. Como resultado, temos:

$$\vec{K} = t\vec{p} - \vec{x}E \quad (1.57)$$

A álgebra de Lie das quantidades de representação escalar se relacionam pelas relações:

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}L_k \quad (1.58)$$

$$[K_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}K_k \quad (1.59)$$

Em suma, os elementos de *boosts* que compõem o grupo das transformações de Lorentz é caracterizado por ser não-abeliano, além de que, por sua álgebra de geradores resultar em geradores do grupo de rotações, os *boosts* não formam um subgrupo, e o comutador dos geradores de *boosts* com os de rotações nos geram elementos do grupo de Lorentz, e o grupo de rotações pode ser interpretado como um subgrupo do grupo de Lorentz. Desta forma, as transformações de rotações e *boosts* é o grupo de Lorentz. Um grupo mais abrangente é o grupo de Poincaré, que reúne além das transformações de rotações e *boosts*, as transformações sob translações.

1.4 Grupo de Poincaré

O grupo de Poincaré, ou grupo de Lorentz não-homogêneo, é um grupo não abeliano definido pelo Hermann Minkowski como o grupo de isometrias do espaço-tempo que reúne as transformações de translações, rotações e *boosts*. Dada a invariância do intervalo, na condição da relatividade restrita, as leis física devem ser covariantes, desta forma, as leis de transformações que formam o grupo de Poincaré devem garantir as leis de conservação da teoria física.

Grupo de Translações

Antes de tratarmos do grupo de Poincaré, veremos uma das transformações incluídas no grupo, translações ao espaço quadridimensional. Analogamente ao caso das rotações que, sob a teoria física invariante fornece grandezas conservadas, que no caso é o momento angular, teremos que para essas transformações as quantidades conservadas são a energia e o momento linear. Definimos a transformação de translação na coordenada como:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu} \quad (1.60)$$

onde a^{μ} é o parâmetro infinitesimal de transformação. O gerador para o caso de translação é definido com:

$$P^{\mu} = i \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial a^{\mu}} \bigg|_{a=0} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = i \partial_{\nu} \quad (1.61)$$

A quantidade $i \partial_{\nu}$ obtida é o operador quadrimomento (o operador quântico do observável momento p é definido como $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$, enquanto que o operador de Energia é definido como $E = i\hbar\partial_t$) cujas componentes são a energia e os momentos:

$$i \partial_{\nu} \equiv (E, \vec{P}) \quad (1.62)$$

onde utilizamos as definições de operadores para Energia e momento.

Definindo o parâmetro infinitesimal a^{ν} , temos que

$$dx'^{\nu} \equiv a^{\nu} = -i a^{\sigma} P^{\sigma} x^{\mu} = -i a^{\sigma} (i \partial_{\sigma}) x^{\mu} = -i a_{\sigma} P^{\sigma} x^{\mu} \quad (1.63)$$

de maneira que para a definição da coordenada transformada x'^{μ} :

$$x'^{\mu} = (1 - i a_{\sigma} P^{\sigma}) x^{\mu} = T(a) x^{\mu} \quad (1.64)$$

em que é possível demonstrar que as condições de grupo aplicadas em $T(a)$ são válidas. Desta forma, a álgebra dos geradores do grupo de translações é

$$[P_{\mu}, P_{\nu}] = 0 \quad (1.65)$$

denotando ser um grupo abeliano ou comutativo.

Grupo de Poincaré

Conhecidas as quantidades conservadas para translações e rotações, teremos que o grupo de Poincaré terá dez geradores que são interpretados fisicamente como quantidades conservadas em transformações infinitesimais, das quais teremos quatro para translações, que são energia e momento, três para rotações, que é o momento angular e três para os *boosts*. Desta forma, o grupo de Poincaré é definido por uma matriz que reúne as transformações de rotações e *boosts*, mais as transformações de translações (BOGOLÛBOV et al., 1990):

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu} \quad (1.66)$$

sendo, assim, um grupo de dez dimensões (reais), onde Λ é a matriz de transformação de Lorentz e a^{μ} é o parâmetro infinitesimal das transformações de translação. Podemos tomar como parâmetro real da vizinhança de uma identidade, a matriz 4x4 antissimétrica $\omega^{\mu\nu}$, de maneira que os elementos do grupo são definidos por:

$$p = \exp\left(\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\mathcal{M}_{\mu\nu}\right) \quad (1.67)$$

onde $\mathcal{M}_{\mu\nu}$ são os geradores do grupo (rotações e *boosts*) que são antissimétricos em μ e ν pois uma parte simétrica não contribuiria na contração de $\mathcal{M}^{\mu\nu}$. Esse gerador é definido a partir dos geradores de rotação L_{ij} , em que $\mu = i$ e $\nu = j$, e os geradores de *boosts*, K_{i0} , em que $\mu = i$ e $\nu = 0$. Assim, temos que para os geradores \mathcal{M}_{01} , \mathcal{M}_{02} , \mathcal{M}_{03} , \mathcal{M}_{12} , \mathcal{M}_{13} e \mathcal{M}_{23} :

$$\mathcal{M}_{01} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_{03} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$$

A exemplo do que foi feito em rotações e *boosts*, podemos reunir essas matrizes na representação escalar e escrever:

$$\mathcal{M}_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) \quad (1.68)$$

em que para todas as combinações possíveis de μ e ν (para $\mu \neq \nu$) teremos os escalares (1.31) e (1.56). Além disso, sendo o operador momento definido como $P^\mu = i\partial_\mu$, escrevemos:

$$\mathcal{M}_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu \quad (1.69)$$

Partindo desses resultados, a álgebra do grupo de Poincaré, que é a álgebra de Lie, cuja representação de grupo é $SO(1, 3)$, tem relações dos comutadores dado por:

$$[\mathcal{M}_{\mu\nu}, P_\sigma] = i(g_{\nu\sigma}P_\mu - g_{\mu\sigma}P_\nu) \quad (1.70)$$

ou em uma forma mais geral, o comutador dos geradores de rotações e *boosts*, juntando com a comutação acima, fornece:

$$[\mathcal{M}_{\mu\nu}, \mathcal{M}_{\alpha\beta}] = i(g_{\mu\alpha}\mathcal{M}_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}\mathcal{M}_{\nu\alpha} + g_{\mu\sigma}\mathcal{M}_{\nu\sigma} - g_{\nu\beta}\mathcal{M}_{\mu\sigma}) \quad (1.71)$$

Em suma:

Vimos que transformações infinitesimais podem ser definidas em grupos que obedecem à álgebra de Lie, cujos geradores infinitesimais, na condição de serem invariantes, são as quantidades conservadas que são correspondentes a uma lei de conservação. Organizando os resultados obtidos, teremos:

Transformações Infinitesimais	Invariância respectiva	Álgebras	Geradores/Grand. Conservadas
Translações	Invariância do tempo e do momento	$[P^\mu, P^\nu] = 0$	$p^\mu = i\partial_\mu$
Rotações	Invariância de rotações	$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk}L_k$	$L = -i(r \times \vec{\nabla})$
<i>Boosts</i>	Invariância de Boosts	$[K_i, K_j] = -\epsilon_{ijk}L_k$	$CM = t\vec{\nabla} - \vec{x}E$

Vimos que o grupo de translações é um grupo abeliano, enquanto que o grupo de rotações é um grupo não-abeliano. O grupo de Lorentz é o grupo das rotações mais *boosts*, pois a álgebra do comutador dos geradores de *boosts* nos dá elementos de grupo de rotações. De uma forma mais abrangente e por compactação desse estudo, temos o grupo que abrange todas as transformações anteriores, o grupo de Poincaré, um grupo não-abeliano.

Desta forma, foi denotado a relação fundamental das invariâncias/simetrias presente em um sistema físico com as quantidades conservadas. O Teorema de Noether irá esclarecer essa relação fundamental de forma quantitativa. Antes de mostrar as mesmas quantidades conservadas por meio do teorema de Noether, é necessário preparar o caminho para os nossos objetivos.

Capítulo 2

Mecânica Clássica

Antes de tratarmos a Teoria de Campos Clássicos propriamente dita, é necessário realizar uma breve revisão de toda a mecânica clássica, abordando os formalismos newtoniano, lagrangiano e hamiltoniano. De forma didática, os formalismos serão introduzidos em forma de dois postulados fundamentais, a *função posição*, que fornece o estado físico de um sistema, e a *equação dinâmica*, que rege a dinâmica de um sistema. Além desses tópicos, a introdução de novas ferramentas matemáticas também será necessária para o desenvolvimento não só dos formalismos, como também do objetivo principal deste trabalho.

2.1 Formalismo Newtoniano

O formalismo Newtoniano trabalha com situações físicas de trajetória e de interação entre pares, por meio da introdução de conceitos de força \vec{F} e momento \vec{p} . Uma partícula de massa m disposta no espaço euclidiano em um dado instante pode ser descrito vetorialmente por,

$$\vec{r}(t), \tag{2.1}$$

denominada *função posição*, a partir da qual, pelo calculo diferencial, irá nos fornecer todas as quantidades físicas associados à sua evolução dinâmica, velocidade e aceleração e, conseqüentemente, o momento e a força associados à partícula. Sendo assim, (2.1) é uma quantidade fundamental da mecânica newtoniana.

Toda a mecânica newtoniana se embasa em três leis, conhecidas como as três leis de Newton, às nos ateremos nas duas primeiras leis. A primeira é o *Princípio da Inércia*, o qual afirma que se a soma de todas as forças sobre um corpo é nula, o momento linear p será preservado. Nas palavras do próprio Newton (NEWTON, 1999)

“Todo corpo continua em seu estado de repouso ou de movimento uniforme em uma linha reta, a menos que seja forçado a mudar aquele estado por forças aplicadas sobre ele.”

o momento representa o estado movimento, dado por $m\vec{v}$. Uma vez que o momento do corpo varia temporalmente, isso implica que a força resultante não é nula. Introdúz então a segunda lei de Newton, concebida como a *Equação fundamental da Dinâmica*, que diz

“A mudança de movimento é proporcional à força motora imprimida, e é produzida na direção de linha reta na qual aquela força é aplicada.”

essa lei diz que a taxa de variação do momento linear no tempo é a força \vec{F} . Assim, escrevemos

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (2.2)$$

em que o último termo $d^2\vec{r}/dt^2 = \vec{a}$. Esta é a equação que rege a dinâmica no formalismo newtoniano, e é com ela que é possível determinar a aceleração, momento e a posição (2.1). A terceira lei é o *Princípio da Ação e Reação*, que diz que para cada força aplicada, há uma reação de igual intensidade e de direção oposta.

O formalismo newtoniano, entretanto, demonstra dificuldades para sistemas de muitas partículas, e o seu tratamento se torna complicado, mas que ainda é válida (MARION; THORNTON, 2004). Dessa forma, uma maneira mais simplificada de tratar esses casos será levar em consideração o nível energético do sistema. Os formalismos que desempenham esta análise são os formalismos lagrangiano e hamiltoniano, e suas equações dinâmicas, análogas à segunda lei de Newton, são obtidas a partir do *princípio de Hamilton*, os quais serão úteis para os nossos objetivos.

2.2 Cálculo Variacional: Princípio de Hamilton

O calculo variacional estabelece uma das pontes mais importantes da Matemática com a Física, e resulta em uma das contribuições mais fundamentais para a física, o qual é o princípio de Hamilton, de tal forma que grande parte da Física clássica emerge desse princípio. É provável que o problema motivador que originou o calculo variacional tenha sido o **braquistócrona**, que consiste em determinar o trajeto de menor tempo para uma partícula massiva sujeita a um campo gravitacional realiza. A resposta é contraintuitiva: um trajeto em forma de cicloide (NETO, 2011). É com base em valores máximos e mínimos ao qual uma função possa assumir em que o calculo variacional é feito.

Seja a função F que depende da variável x e de outra função que também depende de x , $y(x)$ e de suas derivadas. Nos ateremos apenas ao caso de derivadas de primeira ordem

$$F = F(y(x), y'(x), y(x), x) \quad (2.3)$$

a integral de caminho dessa função entre dois pontos é dado por I , que não depende da variável de integração, mas das funções $y(x)$. Esse é o ponto determinante que diferencia do Cálculo usual

$$I = \int_a^b F(y(x), y'(x), x) dx \quad (2.4)$$

Desta forma, para cada $y(x)$ a integral I tem um valor, definido como $I = I[y]$. Lê-se que I é funcional de y .

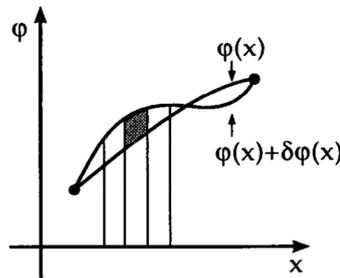


Figura 2.1: Ilustração da derivada funcional do funcional $F(\phi)$ (GREINER, 2013)

Para que função $y(x)$ I é extremo (máximo ou mínimo)? Isto é, para que função a variável da função é nula, $\delta I = 0$. De forma análoga ao calculo diferencial, teremos que

$$\delta I[y(x)] = I[y(x) + \delta y(x)] - I[y(x)] \quad (2.5)$$

Para um caso mais simples, $F[y(x), x]$, teremos que, usando a definição (2.4)

$$\delta I[F(y(x))] = \int_a^b F[y(x) + \delta y(x)] dx - \int_a^b F[y(x)] dx \quad (2.6)$$

que pode ser escrito como:

$$\delta I = \int_a^b dx \frac{\delta F}{\delta y} \delta y \quad (2.7)$$

Para o caso de $F[y(x), y'(x), x]$, teremos que

$$\delta I = \int_a^b \left(\frac{\delta F}{\delta y} \delta y + \frac{\delta F}{\delta y'} \delta y' \right) dx = \int_a^b \left(\frac{\delta F}{\delta y} \delta y - \frac{d}{dy} \frac{\delta F}{\delta y'} \delta y \right) dx \quad (2.8)$$

qual é a equação que Euler obteve em 1744, que representa a condição de x extremo para I . É a equação base do formalismo lagrangiano, por isso o nome de **equação de Euler-Lagrange**. Dentro disso, o funcional $F[y(x)]$ que nada mais é que um mapeamento de um espaço linear normalizado, o espaço de *Bannach*, $M = \{\phi(x) : x \in \mathbb{R}\}$ para um corpo de números reais e complexos, $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} (GREINER; REINHARDT, 2013). A quantidade $\delta F/\delta y(x)$ pode ser definida de modo análogo ao cálculo diferencial por meio de um limite (GELFAND; FOMIN, 2000):

$$\frac{\delta F[y(x)]}{\delta y(x')} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[y(x) + \epsilon \delta(x - x')] - F[y(x)]}{\epsilon} \quad (2.9)$$

A quantidade $\delta(x - x')$ é uma delta de Dirac, em que a variável x é filtrada para um ponto de sua coordenada, $x = x'$.

Introduzida os fundamentos do cálculo variacional, o Princípio de Hamilton será agora explanado. Seja um sistema clássico no instante t_1 , caracterizado por N graus de liberdade¹, o qual nos dá as coordenadas generalizadas e velocidades generalizadas, formando o chamado *espaço de configuração*. Os graus de liberdade N podem ser representados genericamente por:

$$q_i (i = 1, 2, \dots, N). \quad (2.10)$$

essa notação se demonstra ser mais conivente para tratamentos de problemas físicos complicadas (SYMON, 1996). Sendo assim, podemos expressar que no instante t_1 , temos que as coordenadas generalizadas e velocidades generalizadas são, respectivamente, $q_i(t_1)$ e

¹Graus de liberdade é um termo que se refere as mínimas possibilidade do estado físico de uma sistema/partícula, o qual é relacionado , para cada direção possível, a posição e movimento.

$\dot{q}_i(t_1)$. Seja f uma função que depende de $q_i(t)$ e de $\dot{q}_i(t)$:

$$f = f(q_1, \dots, q_N, \dot{q}, \dots, \dot{q}_N, t_1), \quad (2.11)$$

ou em uma forma mais compacta

$$f = f(q, \dot{q}, t). \quad (2.12)$$

Esse sistema, dado por esta função, evolui temporalmente para o instante t_2 , mudando sua configuração para $q_i(t_2)$. Para determinar a dinâmica dessa nova configuração, o que seria anteriormente pela segunda lei de Newton, para uma formulação mais geral, agora será pelo princípio de Hamilton.

Na Física, temos que a dinâmica de uma função pode ser descrita pelo o que é denominado de *Ação Clássica*, representado por S . em que é um funcional escalar. O *Princípio de Hamilton* estabelece que essa ação deva ser tornado extrema pelo movimento, e que deve ser mínima (O princípio de Hamilton também é conhecido como *princípio da mínima Ação*). Desta forma, a trajetória clássica é para qual a Ação é estacionária, em termos de análise funcional, é escrita:

$$\delta S = 0 \quad (2.13)$$

Aplicando na função do sistema (2.13), que carregue as informações de um sistema físico, a ação nessa função é dada por:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt f(q, \dot{q}, t) \quad (2.14)$$

onde $f(q, \dot{q}, t)$ é uma função qualquer que carrega as informações do sistema a respeito das coordenadas generalizadas q , velocidade \dot{q} e do tempo.

Em tratamentos envolvendo partículas em interação, na condição de que essa partícula seja não-relativística, sendo a mecânica newtoniana vigente, teremos resultados interessantes. A ação de uma partícula com energia cinética K e energia potencial V não definida é dado por:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (K - V) dt \quad (2.15)$$

O integrando acima é uma definição energética de Lagrange. Aplicando o Princípio de Hamilton, tem-se que o resultado obtido é a equação fundamental da dinâmica de Newton

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q) \right) dt = 0$$

$$m\ddot{q} = -\frac{\partial V}{\partial q} \quad (2.16)$$

em que $m\ddot{q}$ é a força resultante e $\partial V/\partial q$ é a força associada ao potencial. Um caso mais simples seria o da partícula livre, em que teremos apenas a energia cinética K associada. Teremos que

$$\delta \left(\frac{1}{2} m \int_{t_1}^{t_2} \dot{q}^2 dt \right) = 0$$

$$\ddot{q} = 0$$

$$\dot{q} = \text{constante} \quad (2.17)$$

obtendo um resultado esperado para uma partícula livre, consistente para sistemas conservativos e com a primeira lei de Newton. Em suma, essa formulação é mais fundamental, de maneira que pode-se dizer que boa parte da física clássica emerge do princípio de Hamilton, incluindo o formalismo newtoniano.

2.3 Formalismos lagrangiano e hamiltoniano

No formalismo lagrangiano, de forma análogo à função posição do formalismo newtoniano, as informações contidas nesse sistema são dadas pela função de Lagrange, dada por:

$$L = L(q, \dot{q}, t), \quad (2.18)$$

onde q são as coordenadas generalizadas, \dot{q} é a derivada primeira das coordenadas e t é o tempo. A função lagrangiana é dada pela subtração das energias cinéticas e potenciais associadas ao sistema

$$L = K - V \quad (2.19)$$

A descrição dinâmica pelo formalismo emerge da aplicação do princípio de Ha-

milton, ou seja, da ação clássica na função de Lagrange

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t) \quad (2.20)$$

Dessa forma, todas as maneiras que o sistema tem para evoluir entre os instantes t_1 e t_2 , segue justamente aquela que corresponde à ação mínima, pela equação (2.14). Aplicando a o princípio de Hamilton

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta L(q, \dot{q}, t) \quad (2.21)$$

em que, usando a definição do calculo variacional para δL , fica

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt \quad (2.22)$$

Usando $\dot{q} = dq/dt$, e notando que a derivada temporal comuta com a variação funcional *delta*, teremos que:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \frac{dq_i}{dt} \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d(\delta q_i)}{dt} \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q \right] dt \end{aligned} \quad (2.23)$$

Reagrupando os termos, temos que

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q \right) dt \quad (2.24)$$

No último termo teremos duas operações inversas, e a quantidade é nula pelos limites dos extremos que a variação funcional pode assumir, $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q dt + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q \right) \Big|_{\delta q(t_1)}^{\delta q(t_2)} \quad (2.25)$$

Desta forma, o último termo será nulo. O integrando do primeiro termo deve ser igual a

zero, para que a variação funcional da ação seja nula:

$$\delta S = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (2.26)$$

Considerando que o sistema tenha as coordenadas generalizadas independentes, ou seja, sem vínculos, a expressão vai ser escrita como

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (2.27)$$

que é a equação *Euler-Lagrange*, que rege a dinâmica no formalismo lagrangiano. Substituindo a função L pela definição de uma partícula, chegaremos na segunda lei de Newton (2.17). Usando a definição da partícula livre, é obtida a equação (2.18), cuja velocidade é constante. Essas aplicações validam não só a equação de Euler-Lagrange como também o princípio de Hamilton para a mecânica newtoniana.

Sendo a função de Lagrange dependente de q , \dot{q}_i e do tempo t , as informações de um sistema físico de posição e movimento só serão conhecidas desde que se conheça as coordenadas generalizadas, e por meio delas é possível se chegar na aceleração generalizada \ddot{q}_i . De mesmo modo, por meio da \dot{q}_i , obtém-se o momento generalizado p_i , dado por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.28)$$

de maneira que, substituindo na equação de Euler Lagrange, teremos

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (2.29)$$

Partindo do diferencial total da função de Lagrange, que depende de q , \dot{q} e por vezes do t , tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \\ dL &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (2.30)$$

utilizando as definições (2.28) e (2.29),

$$dL = \sum_{i=1}^N (\dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (2.31)$$

Como $pd\dot{q}$ pode vir de uma diferencial do produto, $d(p_i\dot{q}_i)$, ou seja, $d(p_i\dot{q}_i) - \dot{q}_i p_i$, escrevemos

$$dL = \sum_{i=1}^N [\dot{p}_i dq_i + d(p_i\dot{q}_i) - \dot{q}_i p_i] dt \quad (2.32)$$

Após algumas manipulações algébricas, obtemos

$$d \left(\sum_{i=1}^N \dot{q}_i p_i - L(q_i, p_i, t) \right) = \sum_{i=1}^N (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (2.33)$$

A quantidade do lado esquerdo da equação é o hamiltoniano, que está em função de q e de p .

$$\sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t) = H \quad (2.34)$$

Nota-se que essa quantidade vem da transformada de Legendre, onde a *função de Hamilton* $H(q, p)$ é promovida à função de Lagrange $L(q, \dot{q})$. Agora que o lado esquerdo de (2.34) depende de q e de p , podemos escrever o diferencial de $H(q, p)$:

$$dH = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial H}{\partial q} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (2.35)$$

Comparando a equação (2.34) com (2.36), teremos as equações de Hamilton:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (2.36)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (2.37)$$

além da equação

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (2.38)$$

É possível obter a definição de energia da hamiltoniana análoga a definição

energética de Lagrange (2.19) a partir do problema físico do MHS e usando para $\dot{q} = p/m$:

$$H = K + V \quad (2.39)$$

Para mostrar que o formalismo hamiltoniano emerge do princípio de Hamilton, invertendo a definição de Hamilton (2.34) de modo que seja escrito como $\dot{q}p - H(q, p)$ e usando em (2.13), obteremos as mesmas equações dinâmicas de Hamilton de (2.36) e (2.37):

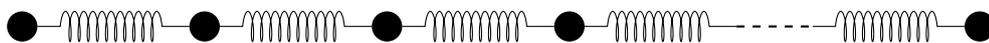
$$\int dt \delta(\dot{q}p - H(q, p)) = 0$$

$$\int dt \left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \delta p + \int dt \left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \delta q = 0 \quad (2.40)$$

as quantidades dos integrados são as equações de movimento do formalismo hamiltoniano. A garantia que essas equações descrevem uma evolução clássica é a equação de Euler-Lagrange que foi utilizada no desenvolvimento das equações.

Exemplo: Cristal Unidimensional Clássico

Uma aplicação prática dos formalismos da mecânica clássica já apresentados para análise e descrição de problemas físicos é o exemplo do cristal unidimensional. Supõe-se um sistema finito de n partículas de massas iguais acopladas entre si por molas cuja constante k é a mesma para todas. O sistema está configurado de forma a ficar disposto em cadeia no eixo x , espaçados por uma distância média de equilíbrio a :



Pelo formalismo newtoniano, esse sistema em cadeia pode ser expressa pela equação que rege a dinâmica do sistema (2.2). Sabendo que uma vez conhecida a força, é possível obter as informações de posição e de momento associados ao sistema. Pela equação resultante temos

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i^{ext} \quad (2.41)$$

tomando uma análise a partir de uma partícula j do sistema, sendo este um índice localizador, o qual exerce e também sofre uma força com partículas vizinhas, sendo esta a

interação aos pares. Esse sistema, por sua vez, sofre a ação de forças externas, que podemos interpretar como sendo a soma total das interações entre pares das demais partículas da cadeia.

Pela definição da lagrangiana (2.19), o nível energético de uma partícula do sistema é dado por:

$$L_j = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}k(q_{j+1} - q_j)^2 \quad (2.42)$$

onde o primeiro termo e segundo termo da parte direita da equação são, respectivamente, a energia cinética e a potencial (do tipo elástico). Se quisermos escrever o sistema pela hamiltoniano, basta aplicar em (2.39)

$$H = \dot{q}p - L = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 \quad (2.43)$$

mas para o tratamento deste problema físico, o formalismo lagrangiano é mais apropriado. Como a equação (2.42) é de apenas uma partícula de um sistema de n partículas, a lagrangiana total é dado pela soma da definição de cada partícula deste sistema:

$$L_n = \sum_{j=1}^n L_j = \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{2}m\dot{q}_j^2 - \frac{1}{2}k(q_{j+1} - q_j)^2 \right] \quad (2.44)$$

Pela equação dinâmica do formalismo lagrangiano (2.27), obtemos a equação de movimento do sistema:

$$m\ddot{q}_n - k(q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n) = 0, \quad (2.45)$$

onde $n = 1, 2, \dots, N$. A solução da equação tem por ferramenta matemática a série de Fourier discreta, que consiste em escolher novas coordenadas que desacoplem o sistema de equações diferenciais, fornecendo o comportamento individual de cada partícula do oscilador harmônico (GREINER; REINHARDT, 2013).

Podemos tomar um limite contínuo da equação (2.45), tomando a distância média das partículas tendendo a zero, $a \rightarrow 0$ e o número de partículas tendendo ao infinito, $N \rightarrow \infty$, passando de discreto para o contínuo, e que a função pode ser expressa da seguinte forma

$$q_n(t) \rightarrow \phi(x, t) \quad (2.46)$$

que é a função contínua do sistema que agora é denominada *campo clássico*, contendo

toda as informações do sistema. Com os limites impostos de a e N e utilizando agora a função contínua no lugar de q , obteremos uma equação conhecida, que é

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{m}{k} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0, \quad m/k = 1/v^2 \quad (2.47)$$

ou seja, o comportamento do sistema obedece a equação d'Alembertiano, mais conhecida como a *equação de onda*. Exemplos de campos relativísticos na Física são os campos elétrico e magnético. Percebe-se que o ato de generalizar o caso de osciladores discretos para o caso contínuo nos levou para uma frente de estudo mais abrangente da Física, o qual é a Teoria de Campos. Veremos o contínuo para os formalismos lagrangiano e hamiltoniano, importantes para o prosseguimento do trabalho.

Capítulo 3

Teoria de Campos

Antes de definimos a Teoria de Campos, podemos começar primeiramente definindo o conceito de campo na Física para facilitar o entendimento, para depois adentrar na teoria com mais clareza. Um campo físico que pode ser representado por valores matemáticos de escalar, vetor ou tensor, fornecendo características ou informações intrínsecas ao campo, de maneira que a identifique. Para um ponto de vista matemático, para um campo escalar, é um conjunto de vetores dispostos em um espaço, onde em cada ponto do mesmo tem-se vetores associados a ela, com direção e sentido próprios. Na perspectiva física, é definido como atribuições de uma quantidade ou grandeza física associada a todos os pontos do espaço e do tempo (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 2008b). Um bom exemplo é o escoamento de um fluido através de um tubo, onde em cada ponto há uma velocidade de escoamento associada.

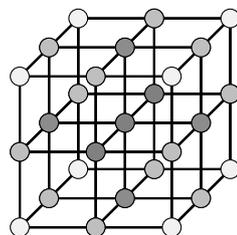
A Teoria de Campos estuda como as descrições dos chamados campos físicos interagem com a matéria. Historicamente, as primeiras teorias de campo foram a teoria da gravitação de Newton e as equações de Maxwell, bases do eletromagnetismo. No eletromagnetismo por exemplo, uma partícula carregada exerce no meio externo o campo elétrico, interagindo com as demais partículas, atraindo-as ou repelindo-as. Esses campos citados são exemplos do que é chamado de Teoria de Campos Clássico. O termo clássica, rotineiramente concebida como toda a formulação da física pré-1900, se refere a toda física não-quântica. Dessa forma, todas as situações físicas não-relativísticas e relativísticas estão compreendidas na Teoria Clássica de Campos.

Nos atendo um pouco à física relativística, a publicação do artigo da teoria da relatividade especial de Einstein, em 1905, fez com que fosse necessário visitar toda a física pré-1900 sob essa nova perspectiva. Nos campos físicos não foi diferente. Como o tempo é agora uma coordenada e não mais um parâmetro como era antes, os valores atrelados a cada ponto do espaço dependem dela. Nessa nova formulação, levou fim um dos entraves da física determinística de fazer valer a covariância das leis físicas como fator validador da teoria eletromagnética, estando de acordo com o primeiro postulado da relatividade (TIPLER; LLEWELLYN, 2014).

As Teoria Clássica de Campos é comumente expressa matematicamente em funções lagrangianas (MARION; THORNTON, 2004). Esta função, quando submetida ao princípio da mínima ação, nos dá as equações de campo correspondente e uma lei de conservação atrelada a ela. O conceito de campo é comumente utilizado nos estudos do eletromagnetismo e gravidade, duas das quatro forças fundamentais da natureza. Esse são os campos mais simples do tipo vetorial, definidos para o campo clássico. Indo um pouco mais além, a Teoria de Campos Quântico é a combinação da mecânica quântica com a relatividade especial (SCHWARTZ, 2014), em que os fenômenos quânticos, serão analisados na perspectiva relativística, em regimes de altas velocidades.

3.1 Passagem para o Contínuo

Para introduzir alguns aspectos básicos associados à evolução dinâmica dentro da teoria de campos, partiremos da mecânica clássica para promover as quantidades discretas para contínuas, adentrando no Campo Clássico (NETO, 2017).



Tomando como exemplo uma malha de cristal de N partículas generalizado para 3 dimensões e tomando uma parte deste sistema com 4 partículas será dado por um volume $\Delta V = a^3$. A lagrangiana desse sistema contém um grau de liberdade associado a cada eixo, $L = (q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)$. A lagrangiana total do sistema pode ser dado em uma

forma mais compacta como

$$L = \sum_j^N L_i(q_j, \dot{q}_j) \quad (3.1)$$

onde $j = (1, 2, 3)$, de acordo com o espaço em que está inserido. O somatório indica que o sistema é discretizado.

Partindo da premissa de que os limites da distância a entre suas partículas tende a zero e o número de partículas N tende ao infinito, $a \rightarrow 0$ e $N \rightarrow \infty$, teremos que o volume tenderá à zero, $\Delta V \rightarrow 0$, passando a ser um sistema contínuo. Nessa nova perspectiva, não será mais a coordenada que carregará a informação do sistema, mas a variável do campo $\phi(\vec{r}, t)$, onde a informação contida carrega informações do espaço, $\vec{r} = (x, y, z)$.

Partindo de

$$L = \frac{\sum_j^N L(q_j, \dot{q}_j)}{\Delta V_j} \Delta V_j \left\{ \begin{array}{l} \frac{L(q, \dot{q})}{\Delta V_j} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \\ \sum_j^N = \int \\ \Delta V_j = dv \end{array} \right. \quad (3.2)$$

onde para dv , pela notação indicial, teremos que $dv = d^3x$. Nota-se que a derivada parcial leva μ que é $\mu = 0, 1, 2, 3$. Desta forma, a lagrangiana do sistema, agora contínua, será dada por (SCHWARTZ, 2014)

$$L = \int_{t_1}^{t_2} d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (3.3)$$

onde \mathcal{L} é a densidade lagrangiana, não tem dependência explícita do tempo e a integral é sobre todo o espaço. Resumidamente, o índice discreto j da mecânica clássica, dará lugar ao contínuo, dado pelo índice x^μ .

$$q_j(t) \rightarrow \phi(\vec{r}, t) \quad (3.4)$$

a qual pode ser tomada como sendo a extensão contínua das coordenadas normais, onde x é uma variável contínua que carrega a posição e o instante de um ponto, $x^\mu \rightarrow (\vec{x}, t)$.

A ação clássica da densidade lagrangiana é, portanto

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (3.5)$$

Sendo o tempo uma dimensão, pela notação indicial, a ação clássica pode ser escrita como

$$S = \int_{t_1}^{t_2} d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (3.6)$$

onde $d^4x = dt dx dy dz$. Para chegar na equação dinâmica para o formalismo lagrangiano para campos, seguiremos os mesmos passos na mecânica clássica. Sendo a evolução dinâmica da equação descrito pelo princípio de Hamilton, δS , temos que

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \delta \mathcal{L} \\ &= \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta(\partial_\mu \phi) \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

No segundo termo da equação, a variação funcional permuta com a derivada, $\delta(\partial\phi) = \partial(\delta\phi)$, uma propriedade do cálculo variacional em que o caminho tomado pela função \mathcal{L} não depende da variável que no caso é x^μ . Teremos uma quantidade multiplicada com a derivada de outra quantidade, e podemos obter esse resultado utilizando a derivada do produto

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta \phi \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \delta \phi \right] \quad (3.8)$$

Reorganizando os termos

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \delta \phi + \int d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \delta \phi \\ &= \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \delta \phi + \int_\Sigma d\sigma_\mu \delta \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \\ &= \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \delta \phi \end{aligned} \quad (3.9)$$

No último termo na penúltima linha foi usada o teorema de Gauss¹ em que pelas condições

¹O teorema de Gauss consiste na igualdade entre a integral de volume para um divergente de uma função com uma integral de superfície, em que, aplicando nesse caso, podemos enunciar

$$\int_R d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta \phi \right) = \int_\Sigma d\sigma_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta \phi \right) \quad (3.10)$$

de contorno, $\delta\phi(t_1) = \delta\phi(t_2)$, essa quantidade se anula. Lembrando que a variação funcional da ação é, pelo princípio de Hamilton, igualada a zero, e que para que isso seja verdade, a quantidade de dentro do parentese deve ser zero

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi} \right) = 0 \quad (3.11)$$

chega-se na equação dinâmica do formalismo lagrangiano, a equação de Euler-Lagrange para campos.

Para o formalismo hamiltoniano, de forma análoga ao lagrangiano, na passagem da mecânica do discreto para o contínuo, teremos a densidade hamiltoniana, que é dada por

$$H = \int_{t_1}^{t_2} d^3x \mathcal{H} \quad (3.12)$$

ou simplesmente hamiltoniana, por brevidade. Tendo a generalização da quantidade discreta q_j promovida para uma variável contínua ϕ de campos, (3.4), introduzimos para o formalismo hamiltoniano o momento canônico conjugado para $\phi(\vec{r}, t)$

$$\pi(\vec{r}, t) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} \quad (3.13)$$

e que, substituindo na equação de Euler-Lagrange

$$\dot{\pi} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \quad (3.14)$$

Desta forma, podemos escrever, seguindo os mesmos passos do caso discreto, o hamiltoniano via transformada de Legendre, dado por

$$\mathcal{H}(\phi, \pi) = \dot{\phi}\pi - \mathcal{L} \quad (3.15)$$

Diferentemente do caso discreto, sendo o cálculo variacional o usual para campos, para obter as equações de Hamilton para o caso contínuo, partiremos da ação da Lagrange (3.7) mas nos ateremos apenas na variação dela, $\delta\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned} \delta S = \int d^4x \delta\mathcal{L} &= \int d^4x \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} \delta\dot{\phi} \right) \\ &= \int d^4x \left(\dot{\pi} \delta\phi + \pi \delta\dot{\phi} \right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Na última passagem foi feita substituições com as definições (3.13) e (3.14). Para $\pi\delta\dot{\phi}$ podemos usar de um análogo da derivada do produto para o cálculo variacional, ou seja $\delta(\pi\dot{\phi}) = \dot{\phi}\delta\pi + \pi\delta\dot{\phi}$. Assim

$$\int d^4x \delta\mathcal{L} = \int d^4x \left(\dot{\pi}\delta\phi + \delta(\pi\dot{\phi}) - \dot{\phi}\delta\pi \right) \quad (3.17)$$

Reorganizando, teremos que no lado esquerdo da equação temos o hamiltoniano escrito pela transformada de Legendre dada em (3.15)

$$\begin{aligned} \int d^4x \delta(\pi\dot{\phi} - \mathcal{L}) &= \int \left(\dot{\phi}\delta\pi - \dot{\pi}\delta\phi \right) d^4x \\ \int d^4x \delta\mathcal{H} &= \int \left(\dot{\phi}\delta\pi - \dot{\pi}\delta\phi \right) d^4x \end{aligned} \quad (3.18)$$

Realizando o calculo variacional $\delta\mathcal{H}$ pela definição,

$$\begin{aligned} \int d^4x \delta\mathcal{H} &= \int d^4x \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi} \delta\pi \right) \\ &= \int d^4x \left(\dot{\phi}\delta\pi - \dot{\pi}\delta\phi \right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Organizando os termos por fator comum

$$\int d^4x \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi} + \dot{\pi} \right) \delta\phi + \int d^4x \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi} - \dot{\phi} \right) \delta\pi = 0 \quad (3.20)$$

Como $\delta\phi$ e $\delta\pi$ são arbitrários e independentes, a eq. (3.20) implica em:

$$\dot{\phi} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi} \quad (3.21)$$

$$\dot{\pi} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi} \quad (3.22)$$

os quais são as equações dinâmicas do formalismo Hamiltoniano para campos.

Desta forma, foram definidas as densidades dos formalismos e as suas respectivas equações dinâmicas, as versões relativísticas das equações da mecânica clássica. Onde as variáveis das funções eram discretas, agora, na Teoria de Campos propriamente dita, são contínuas.

3.2 Campos Clássicos

Após abordar no primeiro capítulo a mecânica clássica, juntamente com a ação clássica, princípio de Hamilton e o cálculo variacional, foi feita neste capítulo a passagem da mecânica clássica para o contínuo, introduzindo desta forma a teoria de campos. Agora veremos as aplicações da teoria de campos para a Física, será introduzido de forma breve os campos físicos em que os formalismos de campo se aplicam e o elas descrevem dinamicamente (GOMES, 2015).

Os campos físicos podem ser descritos por densidades do lagrangianos, que tomam forma de acordo com o campo clássico. Podemos citar os principais campos clássicos que regem determinados comportamentos de partículas: o *campo escalar*, o *campo vetorial* e o *campo espinorial*. Cada campo será apresentado mostrando as densidades de Lagrange com as respectivas equações dinâmicas obtidas pela equação dinâmica de Euler-Lagrange.

Campos Escalares

Os *Campos Escalares*, ou campos bosônicos, são os campos que descrevem os bósons, que nada mais são que partículas de spin, que no caso de Klein-Gordon é de spin igual zero. Serão apresentados para dois casos particulares com respeito ao valor de carga e da massa do bóson, começando pelo caso mais simples de campo.

a) Campo Escalar Real

O *campo Escalar Real* é o campo de *Klein-Gordon neutro*, que descreve partículas bosônicas descarregadas, cuja densidade lagrangiana é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (3.23)$$

que pela equação de Euler-Lagrange (3.11), nos fornecerá a equação de *Klein-Gordon*, que descreve a dinâmica dos píons de spin 0,

$$(\square + m^2)\phi = 0 \quad (3.24)$$

b) Campo Escalar Complexo

A forma complexa dessa equação é o campo Escalar Complexo, ou campo de *Klein-Gordon* carregado, que descreve a dinâmica de partículas bosônicas carregadas, cuja densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \quad (3.25)$$

que nos fornece as equações dinâmicas que são

$$(\square + m^2)\phi = 0 \quad \text{e} \quad (\square + m^2)\phi^* = 0 \quad (3.26)$$

Campo de Maxwell

O campo Vetorial é o campo que descreve os fótons, por isso é também chamado de campo eletromagnético ou Campo de Maxwell. A densidade de Lagrange é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (3.27)$$

onde $F^{\mu\nu}$ é o tensor de Maxwell, que fornece as equações de Maxwell.

Campo de Dirac

O campo espinorial é o mais complicado dos demais campos, pois generaliza o conceito de vetores e tensores para os complexos. O exemplo mais proeminente do campo de espinorial é o *campo de Dirac*, cuja densidade Lagrangiana do campo de Dirac é

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \quad (3.28)$$

A equação dinâmica do campo de Dirac descreve o comportamento dos férmions, que são as partículas massivas de spin 1/2.

3.3 Campo Escalar Real de Klein-Gordon

O campo que nos interessa é o campo escalar real, descrito pela equação de *Klein-Gordon*. Para introduzi-lo de forma didática, começaremos por sua motivação histórica.

Sendo a equação de Schrödinger da mecânica quântica a descrição da probabilidade de uma partícula, Oskar Klein e Walter Gordon propuseram em 1926 a descrição de uma equação de onda relativística de uma partícula livre, iniciando pela primeira quantização das grandezas físicas da energia relativística (NETO, 2017; GREINER et al., 2000)

$$E^2 = p^2 + m^2 \quad (3.29)$$

lembrando que será adotado para as constantes físicas as unidades naturais. Substituindo na equação dos autovalores na forma quadrática e quantizando as quantidades físicas do momento e energia, teremos que

$$(-i^2 \nabla^2 + m^2) \psi = i^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (3.30)$$

e após algumas manipulações algébricas obtemos

$$(\square + m^2) \psi = 0 \quad (3.31)$$

onde,

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \nabla^2 \psi \quad (3.32)$$

chegando na equação de Klein-Gordon, a versão relativística da equação de Schröendiger. É verificável que a equação é covariante pois carrega consigo a invariância de lorentz, além de que é uma equação de onda clássica (junto com o termo temporal está $1/c^2$ que foi suprimido pelo uso das constante universais).

Solução para Partícula Livre

Tratando a equação de Klein-Gordon para o caso da partícula livre, com o potencial nulo $V(x) = 0$, para a solução utilizamos a transformada de Fourier inversa dada por

$$\psi(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \psi(p) \quad (3.33)$$

teremos que sua solução para partícula livre é da forma (GREINER et al., 2000)

$$\phi = \exp\left(-\frac{1}{\hbar} p_\mu x^\mu\right) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(p_0 x^0 - \vec{p}\vec{x})\right) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{x} - Et)\right) \quad (3.34)$$

de maneira que, substituindo a solução de onda na equação de (3.31), teremos que

$$E = \pm \sqrt{p^2 + m^2} \quad (3.35)$$

Vemos que a equação de *klein-Gordon* prevê estados de energias positivas e negativas, diferentemente da equação de Schrödinger, que prevê apenas energias positivas. Para uma partícula livre, a ideia de energia negativa não faz sentido. A interpretação física para os estados de energias negativas é a existência das chamadas antipartículas.

Equação da Continuidade

Agora, o próximo passo é definir a densidade de probabilidade da equação, para verificar se a equação obedece a equação da continuidade dada a seguir

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} j = 0 \quad (3.36)$$

Multiplicando a equação de Klein-Gordon pela função de onda conjugada ψ^* e igualando com a equação de Klein-Gordon carregada (3.26)² e multiplicando pela função de onda ψ teremos que

$$\psi^*(\square + m^2)\psi = \psi(\square + m^2)\psi^* \quad (3.37)$$

Voltando para o d'Alembertiano para notação de covariância $\square = \partial_\mu \partial^\mu$, e que após algumas manipulações algébricas teremos que

$$\partial_\mu(\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*) = 0 \quad (3.38)$$

definimos a quantidade entre parêntese como a densidade de corrente j^μ , assim

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (3.39)$$

e que,

$$j^\mu = \frac{i\hbar}{2m}(\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*) \quad (3.40)$$

o termo $i\hbar/2m$ foi multiplicada para que a densidade de corrente seja dimensionalmente coerente com a probabilidade ($1/cm^3$). Abrindo tanto a derivada covariante ∂_μ quanto a

²A motivação da igualdade das equações de Klein-Gordon neutro (3.24) com a carregada (3.26) é que ambas são nulas.

derivada contravariante ∂^μ por suas definições, teremos

$$\partial_0 \left[\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \partial^0 \psi - \psi \partial^0 \psi^*) \right] + \partial_i \left[\frac{-i\hbar}{2m} (\psi^* \partial^i \psi - \psi \partial^i \psi^*) \right] = 0 \quad (3.41)$$

comparando com a equação de continuidade (3.36) definimos que a densidade de probabilidade ρ é

$$\rho = \frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \partial^0 \psi - \psi \partial^0 \psi^*) \quad (3.42)$$

Essa expressão apresenta um problema por ter a derivada de segunda ordem no tempo. Em determinados instantes, ψ e $\partial^0 \psi$ assumem valores arbitrários, podendo ser positivos e negativos. Assim a função ρ não pode ser interpretado como uma densidade de probabilidade.

Limite Não-Relativístico

Após partir da equação de Schrödinger para obter a sua versão relativística, a equação de Klein-Gordon, vamos assumir uma aproximação não relativística da equação afim de obtermos a equação de Schrödinger novamente, que afinal de contas é uma equação não relativística. Para iniciar, vamos fazer o *ansatz*³,

$$\psi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r}, t) e^{-\frac{i}{\hbar} mc^2 t} \quad (3.43)$$

A proposição do *ansatz* é para uma aproximação da energia da partícula para a energia de repouso da massa, definindo da seguinte forma $E' = E - mc^2$, onde a energia E' , é não-relativística, de maneira que

$$\left| i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| \simeq E' \varphi \ll mc^2 \quad (3.44)$$

assumindo essa definição, podemos fazer a derivada temporal de (3.42)

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{imc^2}{\hbar} \varphi \right) e^{-\frac{i}{\hbar} mc^2 t} \approx -\frac{imc^2}{\hbar} \varphi e^{-\frac{i}{\hbar} mc^2 t} \quad (3.45)$$

³*Ansatz é um palpite que se dá para uma solução sendo verificável após obter os resultados.*

sua derivada de segunda ordem no tempo fica

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{imc^2}{\hbar} \varphi \right) e^{-\frac{i}{\hbar} mc^2 t} \right] \approx - \left(i \frac{2mc^2}{\hbar} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{m^2 c^4}{\hbar} \varphi \right) e^{-\frac{i}{\hbar} mc^2 t} \quad (3.46)$$

de modo que utilizando (3.31) obtemos:

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m} \vec{\nabla}^2 \varphi \quad (3.47)$$

o qual é a equação de Schrödinger para partículas sem spin. Como a partícula é descrita tanto para funções de ondas relativísticas quanto para não-relativísticas, concluímos que a equação de Klein-Gordon descreve partículas sem spin.

Partícula Livre de Spin-0

Tendo as definições de carga e corrente da equação de Klein-Gordon, trataremos o problema aplicando novamente o *ansatz* que nada mais é que é a solução da função de onda (3.34) acompanhada de uma constante de normalização que irá ser determinada posteriormente

$$\psi_{\pm} = A_{\pm} \exp \left(\frac{i}{\hbar} (p_i x^i \pm |E_p| t) \right) \quad (3.48)$$

onde $|E_p| = \pm \sqrt{p^2 + m^2}$. Inserindo a última equação na densidade de probabilidade obtemos

$$\rho = \pm \frac{e|E_p|}{mc^2} \psi_{\pm}^* \psi_{\pm} \quad (3.49)$$

em que ϕ_{\pm} nos sugere como interpretação para a densidade partículas de carga ϵ positivas e negativas e de mesma massa. Como solução da equação de onda, é feito uma combinação linear de ambos os tipos de funções, discretizando as ondas planas contínuas de (3.34). Estabelecendo condições de contorno periódicos para as ondas a uma grande caixa cúbica com comprimento de aresta L. Assim,

$$\psi_{n(\pm)} = A_{n(\pm)} \exp \left(\frac{i}{\hbar} (p_i x^i \mp |E_{p_n}| t) \right) \quad (3.50)$$

e que também, para p_n e E_{p_n}

$$E_{p_n} = \sqrt{p_n^2 + m_n^2} \equiv E_n \quad (3.51)$$

$$p_i = \frac{2\pi}{L} n_i \quad (3.52)$$

onde $n_i = n_x, n_y, n_z$ admite valores discretizados. Para normalizar a função de onda aplicaremos na equação (3.49), como sendo

$$A_{n(\pm)} = \sqrt{\frac{mc^2}{L^3 E_n}} \quad (3.53)$$

assim para a solução teremos

$$\psi_{\pm} = \sqrt{\frac{mc^2}{L^3 E_n}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}(p_i x^i \mp |E_p|t)\right) \quad (3.54)$$

em que contém duas constantes de normalização, uma positiva e outra negativa. Agora para uma solução mais geral da equação de Klein-Gordon dada por

$$\psi = \sum_n C_n^{\pm} \psi_{n\pm} = \sum_n C_n^{\pm} \sqrt{\frac{mc^2}{L^3 E_n}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}(p_i x^i \mp |E_p|t)\right) \quad (3.55)$$

este modelo é válido para descrever partículas neutras em que ψ não pode ser real, ou seja, $\psi^* = \psi$. A equação de Klein-Gordon para partículas neutras utilizando os valores possíveis para a carga de (3.53), teremos

$$\begin{aligned} \psi_{n,0} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{(n,+)} + \psi_{(n,-)}) \\ &= \sqrt{\frac{mc^2}{2L^3 E}} 2 \cos\left(\frac{p_n x_n - Et}{\hbar}\right) \end{aligned} \quad (3.56)$$

Em suma, se esperava que a equação descrevesse o comportamento relativístico de um elétron livre, por exemplo, mas não foi isso que se provou. A primeira delas é a densidade de probabilidade que podemos obter da equação, o qual pode assumir valores negativos, e que, ao eliminar a raiz da hamiltoniana, admiti-se estados de energia negativa. Na época, em razão desses entraves, a equação foi deixada de lado.(NETO, 2017)

Somente anos mais tarde que a equação de Klein-Gordon voltou à discussão acadêmica, após reinterpretações e novas proposições para as previsões físicas que a equação descrevia, muito em razão da equação de Dirac que ajudou em suas soluções, mostrando que a equação de Klein-Gordon previa fenômenos físicos ainda não descobertos à sua época.

Campo de Klein-Gordon

Assim como toda equação está vinculada à um campo físico, para o campo escalar de Klein-Gordon, teremos o seu campo correspondente. A densidade lagrangiana desse campo é obtido utilizando a equação de Euler-Lagrange para demonstração da equação de Klein-Gordon neutra (3.23). A densidade lagrangiana que satisfaz essa condição é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2) \quad (3.57)$$

O campo escalar real pode ser pensado a fim de comparação como um campo escalar semelhante ao potencial elétrico que calculada o complexo conjugado da variável de campo, recai nela mesma

$$\phi^*(x) = \phi(x) \quad (3.58)$$

ou seja, não há parte complexa, por isso o termo real. Esse campo descreve um sistema de partículas bosônicas de spin 0, como por exemplo os pions e os kaons, partículas elementares.

Algumas observações a serem feitas sobre os campos escalares: Sempre que uma quantidade envolver um produto escalar será chamado de escalar de Lorentz (DAS, 2020):

$$\begin{aligned} \partial\phi_\mu\partial\phi^\mu &= \text{Escalar} \\ \partial\phi_\mu\partial\phi_\nu &\neq \text{Escalar} \\ x_\mu x^\mu = x^2 &= (x^0)^2 - (\vec{x})^2 = \text{Escalar} \end{aligned}$$

Nesse caso, a densidade de Lagrangiana é um escalar de Lorentz

A densidade lagrangiana do campo escalar neutro, dada em (3.56) pode ser definida abrindo a equação de onda, o qual teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\dot{\phi}^2 - \nabla\phi\nabla\phi\right) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \\ &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\nabla\phi\nabla\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \end{aligned} \quad (3.59)$$

podemos identificar que, derivando a densidade lagrangiana por $\partial_\mu\phi$, o momento conju-

gado pode ser definindo como

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi} \quad (3.60)$$

tendo esse resultado, podemos agora definir a densidade hamiltoniana dada em (3.15) como

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} \\ &= \pi \dot{\phi} - \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} \nabla \phi \nabla \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \\ &= \pi^2 - \frac{1}{2} \pi^2 - \frac{1}{2} \nabla \phi \nabla \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \\ &= \frac{1}{2} \pi^2 - \frac{1}{2} \nabla \phi \nabla \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \end{aligned} \quad (3.61)$$

Capítulo 4

Leis de Conservação e o Teorema de Noether

Antes de introduzirmos o Teorema de Noether, retornaremos à discussão das leis de conservação, aprofundando o que já foi apresentado. Sabendo que as leis de conservação são consideradas princípios fundamentais da natureza, uma lei de conservação afirma que uma grandeza mensurável qualquer em uma descrição evolutiva de um sistema isolado é invariante, ou seja, é conservada. Em uma descrição mais abrangente, dada uma transformação contínua de coordenada e/ ou de campo em que a física não muda, deduz-se a presença de uma quantidade conservada.

Fundamentalmente, a invariância de grandezas conservadas nos leva ao conceito de simetria, e que estão intimamente relacionados. Na mecânica clássica por exemplo, leis de conservação da Massa, Energia, Momento e Momento Angular, são oriundas da invariância de transformações temporais de translação e de rotação de espaço. Além dessas quantidades conservadas básicas, os sistemas físicos fornecem quantidades ainda mais fundamentais como Carga e Isospin (GREINER; REINHARDT, 2013).

Em uma definição matemática, uma quantidade denominada X está em função de um parâmetro t e que o seu instantâneo é dado por uma modelagem infinitesimal que, na condição dessa quantidade ser invariante, o resultado será nulo

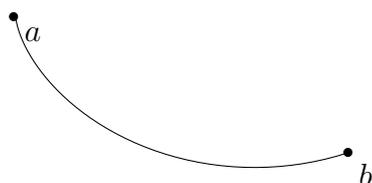
$$\frac{dX}{dt} = \dot{X} = 0 \quad (4.1)$$

Desta forma, dizemos que X é uma constante. Em suma, a lei de conservação diz que uma quantidade mensurável de um sistema físico, não muda a medida que o sistema evolui ao longo do tempo. Essas quantidades conservadas são denominados constantes do movimento.

Na Perspectiva Newtoniana

Para um melhor entendimento das leis de conservação, veremos a atuação delas no formalismo newtoniano. O formalismo newtoniano segue leis de conservação dependendo do tipo de transformação física em que um sistema está submetido, mas que independente de qual é tipo de transformação, obedece a lei de conservação de massa, que estabelece que a massa é invariante mediante uma transformação física. Para uma transformação física que consiste em um translação no tempo de um sistema isolado, nos dá a conservação do momento linear. Uma transformação em um sistema isolado que rotaciona, nos dá a conservação do momento angular. Vale lembrar que sendo sistemas conservativos, nos leva a outra lei de conservação, a lei de conservação da energia.

Seja uma partícula de massa m sujeita a um conjunto de forças de maneira que a força resultante seja igual a zero. A partícula translada dinamicamente de um ponto a no instante t_1 ao ponto b no instante t_2



$$F_{res} = \sum_{i=1}^N F_i = 0 \therefore p = \text{constante} \quad (4.2)$$

sendo a soma de forças igual a zero, teremos que, pela definição de força (2.2), o momento é conservado, ou seja, $p_1(t_1) = p_2(t_2)$ (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 2008b). Desta forma, o estado físico é invariante, explicitando a existência de uma simetria física no sistema, existindo uma relação fundamental de grandezas conservadas com as simetrias, mas que até antes de 1918, não havia nenhuma teoria física e matemática que demonstrasse essa relação. Essa ligação entre simetria e quantidades conservadas só foi estabelecida pelo *Teorema de Noether*, um dos teoremas mais influentes e elegantes do século XX.

4.1 Teorema de Noether

O Teorema de Noether, elaborada pela matemática alemã Amalie Emmy Noether (1882-1935), de maneira informal, nos diz que *para cada simetria das leis físicas existe uma correspondente lei de conservação*. Esta afirmação aparenta ser a mesma da relação fundamental das simetrias com as grandezas conservadas, com a diferença de que a relação é provada pelo teorema, e é isso que veremos no prosseguimento deste estudo. A importância desse teorema é tal que a concepção de que quantidades conservadas são intrínsecas à invariância física mudou a partir do momento que foi estabelecida uma equação que relaciona esses dois conceitos, de forma que por meio desse teorema, é possível prever se um sistema físico é conservativo ou não. O teorema utiliza o formalismo lagrangiano para a modelagem física matemática (NOETHER, 1918).

Para introduzir o teorema, deve-se antes estabelecer de que forma essas transformações atuam em um campo físico. Seja a função de Lagrange $\mathcal{L}(x)$ onde, por questão de brevidade, $x = [\phi(x), \partial_\mu \phi(x)]$, é um sistema dinâmico descrito pela Ação:

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(x) \quad (4.3)$$

A função está submetido por transformações gerais de maneira que dizemos que a Ação é invariante. Começando por definir a quantidade mais fundamental da função, a transformação infinitesimal da coordenada x^μ como:

$$x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu \quad (4.4)$$

e que a mudança correspondente no campo $\phi_r(x)$ é

$$\phi'_r(x') = \phi_r(x) + \delta \phi(x) \quad (4.5)$$

generalizando transformações resultantes na densidade de Lagrange em

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x) + \delta \mathcal{L}(x) \quad (4.6)$$

De maneira fundamental, ocorreu que x^μ quando submetido a uma transformação definida por δx^μ foi promovida à x'^μ , e que podemos generalizar essas definições para os demais

níveis da função. Com base nessas definições de transformações, podemos escrever a Ação da função Lagrange como:

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) = \int d^4x \mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu \phi'(x')) \quad (4.7)$$

denotando a condição de invariância posto inicialmente, de maneira tal que dizemos que são quantidades iguais.

É importante salientar que a transformação apresentada foi tanto no formato de campo ϕ quanto para a coordenada x , essa é a transformação é denominada como *transformação global*. Entretanto, as transformações apresentam uma classe interessante de mudança, em que a coordenada x^μ é preservada como resultado da simetria presente no campo, $x^\mu = x'^\mu$, o qual denominamos essas transformações como *simetrias internas*. Essa diferença não impede que o conceito de simetria se estenda para ambas as transformações (DAS, 2020). Isto posto, definimos as transformações de simetrias internas para o campo e para densidade Lagrange como:

$$\phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x) \quad (4.8)$$

$$\mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}(x) \quad (4.9)$$

A transformação em que apenas o campo é modificada é o que irá nos interessar para o prosseguimento do estudo do teorema de Noether, pois serão importantes na formulação do teorema. Temos que a variação funcional $\delta\phi$ é tido como a transformação que o sistema físico foi submetido. Essa quantidade ainda não foi definida, pois sua definição dependerá de cada tipo de transformação que um campo físico será submetida, tomando a forma apropriada.

4.1.1 Quadridivergência

Já introduzida a forma como as transformações atuam em uma quantidade física, veremos os resultados para ação clássica de sistemas evolutivos. Seja um sistema dinâmico descrito pela Ação

$$S[\phi] = \int d^3x \mathcal{L} \quad (4.10)$$

em que a sua dinâmica é invariante sob as transformações de campo na condição de simetrias internas. Aplicando o princípio de Hamilton na Ação e ignorando a parte esquerda da equação para nos ater apenas à Ação, de maneira que escrevemos a transformação da Ação usando a equação (4.8):

$$S[\phi'] = S[\phi + \delta\phi] = S[\phi] + \delta S[\phi] \quad (4.11)$$

em que isolando o último termo, definimos o princípio de Hamilton

$$\begin{aligned} \delta S[\phi] &= S[\phi'] - S[\phi] \\ &= \int d^4x' \mathcal{L}' - \int d^4x \mathcal{L} = 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Entretanto, não há garantias de que o sistema seja invariante após a transformação, pois a variável de integração do primeiro termo do lado direito difere do segundo. O argumento matemático que preserva o resultado das integrais é o fato do jacobiano J , dessa transformação ser igual a um (DAS, 2020):

$$J = \left| \frac{\partial x^1}{\partial x} \right| = 1 \quad (4.13)$$

de maneira que, mediante uma transformação contínua, a coordenada seja invariante, ou seja, $dx' = dx$. Eis a importância do uso das simetrias internas dita anteriormente. Assim, temos que o Jacobiano assegura o resultado em (4.12). Desta forma teremos que, isolando o último termo para definir o tipo de transformação,

$$\begin{aligned} \delta S[\phi] &= \int d^3x \mathcal{L}' - \int d^3x \mathcal{L} \\ &= \int d^4x (\mathcal{L}' - \mathcal{L}) \\ &= \int d^3x \delta \mathcal{L} \end{aligned} \quad (4.14)$$

na última linha foi usado a equação (4.9), denotando a validade das transformações no campo. Observa-se que após a transformação, a invariância do sistema não foi violada,

pois o jacobiano assegurou o resultado do princípio de Hamilton em que deve ser nulo,

$$\int d^4x \delta\mathcal{L} = 0 \quad (4.15)$$

Entretanto, a quantidade $\delta\mathcal{L}$ pode não ser zero, pois não há garantia de que o caminho tomado pelo sistema não é fechado. Para que a ação seja zero, $\delta\mathcal{L}$ deve ser uma quadri-divergência,

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu K^\mu \quad (4.16)$$

A existência da quantidade K^μ é assegurada pela hipótese do teorema. Para vermos como é definido, escrevemos:

$$0 = \int d^4x \delta\mathcal{L} = \int_R d^4x \partial_\mu K^\mu = \int_{\partial R} d\sigma_\mu K^\mu \rightarrow 0 \quad (4.17)$$

onde, para R tendendo ao infinito, para K^μ :

$$K^\mu \rightarrow 0 \quad (4.18)$$

Nessas passagens matemáticas foi utilizado o teorema da divergência, que é definido pela equivalência da integral da divergência de uma função com uma integral de superfície da mesma função

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{f} dV = \oint_S \vec{f} \cdot dS$$

e que a função \vec{f} tende a zero para o raio da esfera tendendo ao infinito. Para compreender o porque da corrente ser nula, usando a aplicação mais conhecida na física, o teorema de Gauss no eletromagnetismo, em que a função do campo elétrico \vec{E} limitada em uma esfera em volta de uma carga de prova em que, no infinito, o campo é nulo.

4.1.2 Corrente de Noether

Por outro lado, teremos que para $\delta\mathcal{L}$ é por definição do cálculo variacional é dado por:

$$\begin{aligned}
 \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\delta(\partial_\mu\phi) \\
 &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\partial_\mu(\delta\phi) \\
 &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\delta\phi\right) - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\right)\delta\phi \\
 &= \underbrace{\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\right)\right]}_0\delta\phi + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\delta\phi\right)
 \end{aligned}$$

o primeiro termo é a equação de Euler-Lagrange, em que sendo nulo, sobra o último termo

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\delta\phi\right) \quad (4.19)$$

esta igualdade mostra a validade do teorema de Noether. Na condição de simetria invariante, ou seja, $\delta\mathcal{L} = 0$, ou no caso igual a uma derivada total, que não modifica as equações de movimento, denota-se uma grandeza conservada.

Desta forma, pela igualdade da variação funcional da divergência (4.16), igualamos com a definição (4.19), em que teremos:

$$\partial_\mu K^\mu = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi(x)}\delta\phi\right) \quad (4.20)$$

de maneira que pode ser reescrito

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi(x)}\delta\phi - K^\mu\right) = 0 \quad (4.21)$$

demonstrando que sempre que existe uma simetria contínua associada a um sistema, define-se uma corrente, de maneira para quantidade entre parêntese escrevemos

$$J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi(x)}\delta\phi - K^\mu \quad (4.22)$$

o qual denominamos como a corrente de Noether. Assim

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (4.23)$$

A corrente conservada, independente do parâmetro de transformação, nem sempre pode ser um vetor. A sua estrutura é determinada pela estrutura tensorial do parâmetro infinitesimal de transformação. Além de que, dada uma corrente conservada, podemos definir o que chamaremos de carga como:

$$Q = \int d^3x J^0 \quad (4.24)$$

ou seja, pela integral de volume, definimos a carga que é a quantidade física conservada. Veremos estas quantidades conservadas para os casos de transformações de translações, rotações e *boosts*, sem antes definir os tensores que carregam as transformações. E que a garantia de que é de fato uma quantidade conservada é que a derivada temporal da carga Q é nulo

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \quad (4.25)$$

de maneira que podemos escrever

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int d^3x \partial_\mu J^\mu \right) = 0 \quad (4.26)$$

ou seja, a evolução temporal de uma quantidade conservada é invariante. Portanto, definimos o teorema de Noether como: *Sempre que houver uma simetria contínua em um sistema pode-se definir uma corrente conservada.*

Capítulo 5

Quantidades Conservadas

Estabelecido o teorema de Noether, trazendo que o teorema faz uma contribuição sobre as simetrias que englobam um sistema físico, uma vez que entende-se que as simetrias que envolvem um sistema conservado estabelece uma relação com leis de conservação, sobre o qual teremos uma corrente conservada. Desta forma, para cada tipo de transformação de campo, nós teremos uma quantidade conservada dada pela corrente correspondente.

Neste capítulo, será apresentados as transformações que nos diz respeito as leis de conservação. A primeira transformação a ser abordada é a translação do espaço-tempo. A simetria presente irá nos gerar uma quantidade conservada associada a cada direção espacial em que é feito a transformação, devido a homogeneidade e isotropia do espaço. Assim como, para uma translação no tempo, em que vai dinamizando ou transladando vai nos gerar a energia como quantidade conservada. Em suma, teremos quatro quantidades conservadas pela translação no tempo-espaço, denominado como tensor *energia-momento*.

Para transformações de rotações no espaço tridimensional, o qual é o grupo de rotações, e como sistemas naturais são invariantes por rotações, as rotações geram três grandezas conservadas, uma para cada direção, que são os momentos angulares. As transformações de Lorentz ou *boosts*, por sua vez, estão associadas a possibilidades de deslocamentos próximos a velocidade da luz, podem serem imaginados como rotações no espaço quadridimensional, (por isso o grupo de transformações por rotações é um subgrupo da grupo de Lorentz) e que teremos uma grandeza conservada para cada direção, e que essa quantidade corresponderá ao centro de massa. Juntando as grandezas conservadas

de rotações mais *boosts* teremos o grupo de Lorentz, já apresentado anteriormente no primeiro capítulo.

Ao todo, tem-se dez quantidades conservadas no total, translações espaços-temporais, rotações e transformações de Lorentz, que juntas, teremos o grupo de transformações infinitesimais o grupo de Poincaré. Veremos que para cada tipo de transformação, a corrente que é um tensor tomará a forma correspondente em razão do parâmetro de transformação infinitesimal que o tensor carrega. Para translações, a corrente será o tensor energia-momento, que nos irá gerar a energia e os momentos. Para rotações e *boosts*, a corrente será o tensor momento-angular, que irá nos servir tanto para o momento angular propriamente dito, quanto para as grandezas conservadas das transformações de Lorentz, pois ambos são rotações.

5.1 Translações Espaço-Tempo

Seguindo o que foi apresentado, o primeiro caso de transformação a ser demonstrado é o caso de transformação de campo por uma translação. Começando por definir a translação no quadri-vetor x^μ como a transformação local (FLEMING, 1987)

$$x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu \quad (5.1)$$

onde ϵ^μ é uma constante infinitesimal arbitrária como sendo a transformação δx^μ dado em (4.4). Para o campo escalar temos que, assumindo uma simetria do formato do campo:

$$\phi(x^\mu) = \phi'(x'^\mu) \quad (5.2)$$

utilizando a definição de transformação de coordenada no campo de simetria invariante (4.5), teremos:

$$\begin{aligned} \phi(x^\mu) &= \phi'(x^\mu + \epsilon^\mu) \\ \phi(x^\mu) &= \phi'(x^\mu) + \epsilon^\mu \frac{\partial \phi'(x^\mu)}{\partial x^\mu} \\ -\epsilon^\mu \frac{\partial \phi'(x^\mu)}{\partial x^\mu} &= \phi'(x^\mu) - \phi(x^\mu) \end{aligned}$$

isolada os termos na última linha, usando o resultado na transformação de campo com simetria interna (5.2), definimos a transformação substituindo a parte direita da equação:

$$\delta\phi(x) = -\epsilon^\mu \frac{\partial\phi'(x^\mu)}{\partial x^\mu} \quad (5.3)$$

sendo uma derivada de uma transformação infinitesimal, acaba por ser desprezível, ou seja $\partial_\mu\phi'(x) = \partial_\mu\phi(x)$. Assim, usando a notação compacta de derivada, chegamos na transformação para translação:

$$\delta\phi(x) = -\epsilon^\mu \partial_\mu\phi(x) \quad (5.4)$$

Com base nos últimos resultados provenientes para o tipo de transformação de translação, veremos como a variação funcional de Lagrange $\delta\mathcal{L}$ se comporta,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\nu\phi} \partial_\nu(\delta\phi) \\ &= -\epsilon^\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \partial_\mu\phi - \epsilon^\mu (\partial_\mu\partial_\nu\phi) \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\nu\phi} \\ &= -\epsilon^\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \partial_\mu\phi + \partial_\mu\partial_\nu\phi \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\nu\phi} \right) \\ &= -\epsilon^\mu \partial_\mu\mathcal{L} \end{aligned} \quad (5.5)$$

o que implica que para quadridivergência (4.16) definimos:

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu K^\mu = -\epsilon^\mu \partial_\mu\mathcal{L} \quad (5.6)$$

e que nos leva

$$K^\mu = -\epsilon^\mu \mathcal{L} \quad (5.7)$$

Com os resultados (5.4) e (5.7) podemos reescrever a corrente de Noether dada em (4.22)

$$\begin{aligned} J^\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi(x)} \delta\phi - K^\mu \\ &= -\epsilon^\nu \partial_\nu\phi \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi(x)} + \epsilon^\mu \mathcal{L} \\ &= -\epsilon_\nu \left(\partial^\nu\phi \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi(x)} - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right) \end{aligned} \quad (5.8)$$

definimos a quantidade de dentro dos parênteses como

$$T^{\mu\nu} = \partial^\nu \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi(x)} - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (5.9)$$

esse é o *energia-momento*, uma quantidade simétrica. a corrente conservada gerada pelas translações de campo. O tensor é uma matriz que contém a contração de dois vetores, além de ser de *Rank 2*, pelo fato de ter o parâmetro de transformação ser um vetor de 4. Pela definição do teorema de Noether, as cargas conservadas estão associadas a simetrias, teremos que

$$P^\mu = \int d^3x T^{0\mu} \quad (5.10)$$

onde para cada valor de índice escolhida de $\nu = 0, 1, 2, 3$, vai gerar uma quantidade conservada correspondente.

5.1.1 Energia Conservada

Relembrando o campo escalar Real (campo de Klein-Gordon neutro) dada pela densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (5.11)$$

Para uma translação na coordenada temporal, o índice ν será zero. Desta forma, teremos que

$$\begin{aligned} P^0 &= \int d^3x T^{00} \\ &= \int d^3x \left(\partial^0 \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \phi(x)} - g^{00} \mathcal{L} \right) \\ &= \int d^3x (\dot{\phi} \pi - \mathcal{L}) \\ &= \int d^3x \mathcal{H} = H \end{aligned} \quad (5.12)$$

na penúltima passagem se chegou na definição da hamiltoniana. Para ficar mais claro quanto ao campo escalar, poderemos substituir a lagrangiana da penúltima linha por sua definição do campo escalar real:

$$\begin{aligned}
P^0 &= \int d^3x T^{00} = \int d^3x \left((\dot{\phi})^2 - \nabla\phi\nabla\phi - \frac{(\dot{\phi})^2}{2} + \frac{1}{2}\nabla\phi\nabla\phi + \frac{1}{2}m^2(\phi)^2 \right) \\
&= \int d^3x \left(\frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 - \frac{1}{2}\nabla\phi\nabla\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right) \\
&= \int d^3x \left(\frac{1}{2}(\pi)^2 - \frac{1}{2}\nabla\phi\nabla\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right) = \int d^3x \mathcal{H} \quad (5.13)
\end{aligned}$$

chegamos na densidade hamiltoniana do campo escalar dada em (3.61). Temos a hamiltoniana do sistema como a quantidade conservada.

5.1.2 Conservação do Momento Lienar

Para o momento, teremos que para $\nu = i$ onde $i = (1, 2, 3)$. De maneira que

$$T^{0i} = \partial^0\phi \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi(x)} - g^{0i}\mathcal{L} \quad (5.14)$$

de maneira que para os valores de $i = 1, 2, 3$ as respectivas métricas serão nulas, $g^{01} = g^{02} = g^{03} = 0$. Lembrando da densidade lagrangiana do campo escalar (?), e que a partir dele definimos:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi} = \partial^\mu\phi \quad (5.15)$$

Portanto, definimos o tensor e que para a transformação contínua teremos:

$$\begin{aligned}
P^i &= \int d^3x T^{0i} \\
&= \int d^3x (\partial^0\phi\partial^i\phi) \\
&= - \int d^3x (\dot{\phi}\vec{\nabla}\phi) \quad (5.16)
\end{aligned}$$

que naturalmente são interpretados como o momento carregado pelo campo que, por definição, é o momento linear (não deve ser confundido com o momento canônico). Desta forma, foi nos gerado o momento linear para cada translação na coordenada espacial (PESKIN, 1995).

5.2 Rotações e *Boosts*

Sendo o espaço quadridimensional homogêneo para translações, para as transformações de Lorentz (próprias) em que a física é covariante e que desta forma, a Ação deve ser invariante, carrega consigo a propriedade de isotropia para rotações tridimensionais ordinárias no espaço. Essa transformação nos trás outra extensão de transformações de campo é a simetria quanto à rotações do espaço-tempo, um subgrupo do grupo de Lorentz (GREINER; REINHARDT, 2013). A transformação de rotação infinitesimal é dado por (FLEMING, 1987)

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \omega^{\mu\nu} x_{\nu} \quad (5.17)$$

onde $\omega^{\mu\nu}$ é uma matriz que depende dos ângulos de rotação (no espaço de quatro dimensões) e é antissimétrica. Para o campo escalar na condição de ser invariante, teremos que

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi'(x') \\ \phi(x) &= \phi'(x^{\mu} + \omega^{\mu\nu} x_{\nu}) \\ \phi(x) &= \phi'(x) + \omega^{\mu\nu} x_{\nu} \frac{\partial \phi'}{\partial x^{\mu}} \\ -\omega^{\mu\nu} x_{\nu} \partial_{\mu} \phi' &= \phi'(x) - \phi(x) \end{aligned} \quad (5.18)$$

usando (4.8) e desprezando a transformação em ϕ' , por já ser infinitesimal, teremos

$$\delta\phi = -\omega^{\mu\nu} x_{\nu} \partial_{\mu} \phi \quad (5.19)$$

Como consequência, para a variação funcional da densidade $\delta\mathcal{L}(x)$, teremos:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu}\phi} \delta(\partial_{\mu}\phi) \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} (-\omega^{\mu\nu} x_{\nu} \partial_{\mu}\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_{\alpha}\phi} \partial_{\alpha}(-\omega^{\mu\nu} x_{\nu} \partial_{\mu}\phi) \\ &= -\omega^{\mu\nu} x_{\nu} \partial_{\mu}\phi \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \omega^{\mu\nu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_{\alpha}\phi} (\partial_{\alpha} x_{\nu} \partial_{\mu}\phi + x_{\nu} \partial_{\alpha} \partial_{\mu}\phi) \\ &= -\omega^{\mu\nu} x_{\nu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \partial_{\mu}\phi + \partial_{\mu} \partial_{\alpha}\phi \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_{\alpha}\phi} \right) \\ &= -\omega^{\mu\nu} x_{\nu} \partial_{\mu} \mathcal{L}(x) \end{aligned} \quad (5.20)$$

usando a derivada do produto, temos:

$$-\omega^{\mu\nu}x_\nu\partial_\mu\mathcal{L} = -\partial_\mu(\omega^{\mu\nu}x_\nu\mathcal{L}) + \omega^{\mu\nu}\partial_\mu x_\nu\mathcal{L} \quad (5.21)$$

sendo $\partial_\mu x_\nu = g_{\mu\nu}$, e usando a simetria de $g_{\mu\nu}$ e a antissimetria de $\omega^{\mu\nu}$, vemos que $\omega^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\mathcal{L}$, de modo que $\delta\mathcal{L} = \partial_\mu(-\omega^{\mu\nu}x_\nu\mathcal{L})$. Com base neste resultado, tendo que a quadridivergência é definido por $\partial_\mu K^\mu = \delta\mathcal{L}$, definimos:

$$K^\mu = -\omega^{\mu\nu}x_\nu\mathcal{L}(x) \quad (5.22)$$

Utilizando os resultados (5.19) e (5.21) definimos a corrente de Noether para rotações, sendo necessário uma mudança de índices por conveniência:

$$\begin{aligned} \delta\phi &= -\omega^{\lambda\nu}x_\nu\partial_\lambda\phi \\ \delta\mathcal{L} &= -\omega^{\lambda\nu}x_\nu\partial_\lambda\mathcal{L} \end{aligned}$$

Desta forma teremos

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi(x)}\delta\phi - K^\mu \right) \\ &= \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi(x)}(-\omega^{\lambda\beta}x_\beta\partial_\lambda\phi) - (-\omega^{\mu\nu}x_\nu\mathcal{L}) \right] \\ &= \omega_{\lambda\beta}\partial_\mu \left(g^{\mu\lambda}x^\beta\mathcal{L} - x^\beta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi(x)}\partial_\lambda\phi \right) \\ &= \omega_{\lambda\beta}\partial_\mu \left[x^\beta \left(g^{\mu\lambda}\mathcal{L} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi(x)}\partial_\lambda\phi \right) \right] \end{aligned} \quad (5.23)$$

que pode ser escrito como:

$$\omega_{\lambda\beta}\partial_\mu (x^\beta T^{\mu\lambda}) = 0 \quad (5.24)$$

onde identificamos que a quantidade $T^{\mu\nu}$ é tensor energia-momento. Nota-se que o delta $g^{\lambda\beta}$ é a métrica do espaço. Além disso, sendo a quantidade $\omega^{\mu\nu}$ antissimétrico, e arbitrário, a equação tem que apenas a parte antissimétrica do termo entre parêntese é nula. Logo,

$$\partial_\mu (x_\beta T^{\mu\lambda} - x_\lambda T^{\mu\beta}) = 0 \quad (5.25)$$

que usualmente é escrita

$$\partial_\mu M^{\mu\beta\lambda} = 0 \quad (5.26)$$

onde $M^{\mu\beta\lambda}$ é o tensor de momento angular, que nos dará as grandezas físicas geradas pelas rotações e *boosts*.

5.2.1 Conservação do Momento Angular

Assim sendo, teremos que para $M^{\mu\beta\lambda}$ com os índices escolhidos para o espaço de rotações teremos o tensor do momento angular para três dimensões. Para a expressão da carga conservada (4.24) teremos:

$$L_{ij} = \int d^3x M^{ij0} = \int d^3x (x_i T^{0j} - x_j T^{0i}) \quad (5.27)$$

lembrando que o momento P^μ é definido pelo tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$ e que para $\mu = i$ teremos as grandezas correspondentes as coordenadas espaciais, desta forma, teremos que para o tensor do momento angular:

$$L_{ij} = x_i \int d^3x T^{0j} - x_j \int d^3x T^{0i} = x_i P^j - x_j P^i \quad (5.28)$$

em que as cargas são os momentos lineares $P^i \equiv p^i$ e $P^j \equiv p^j$, os quais podemos expressar essas quantidades por sua notação de operadores, $\vec{p} = -i\vec{\nabla}$, de maneira que escrevemos

$$L_k = x_i p^i - x_j p^j = -i(x_i \partial_j - x_j \partial_i) \quad (5.29)$$

que nos dará três quantidades conservadas, que são:

$$L_1 = -i(x_2 \partial_3 - x_3 \partial_2), \quad L_2 = -i(x_1 \partial_3 - x_3 \partial_1), \quad L_3 = -i(x_1 \partial_2 - x_2 \partial_1), \quad (5.30)$$

que são as mesmas obtidas no grupo de rotações nas equações (1.31), os quais são as componentes do operador momento angular $\vec{L} = -i(\vec{r} \times \vec{\nabla})$, dada em (1.32). Verificando a validação do Teorema de Noether, em que a simetria nos gerou o momento angular para rotações em três dimensões.

5.2.2 Conservação da Quantidade Conservadas de *Boosts*

Para transformações de velocidade de *lorentz-boosts*, que podem ser visualizadas como rotações em hiperplanos espaços-temporais mistos de Minskowski, teremos:

$$K_{i0} = \int d^3x M^{0i0} = \int d^3x (x_0 T^{i0} - x_i T^{00}) \quad (5.31)$$

que de forma análoga à obtenção do momento angular, teremos que para esse caso a seguinte expressão

$$K_i = x_0 \int d^3x T^{i0} - x_i \int d^3x T^{00} = x_0 P^i - x^i H \quad (5.32)$$

em que pela notação relativística, as componentes $x_0 = t$ e que $P^i \equiv \vec{p}$ e a energia dada pela hamiltoniana H que por definição, é a energia mecânica E . Desta forma, teremos as grandezas conservadas para velocidades em cada direção espacial:

$$K_x = tp_x - xE, \quad K_y = tp_y - yE, \quad K_z = tp_z - zE \quad (5.33)$$

e que podem ser escritos na equação:

$$\vec{K} = t\vec{p} - \vec{x}E \quad (5.34)$$

Se escrevermos as quantidades físicas do momento e a da energia das equações (5.33) em termos de operadores, obteremos:

$$K_x = -i(t\partial_x + x\partial_t), \quad K_y = -i(t\partial_y + y\partial_t), \quad K_z = -i(t\partial_z + z\partial_t) \quad (5.35)$$

observa-se que são os mesmos resultados dos geradores do grupo de Lorentz (1.56), validando o teorema de Noether para transformações Lorentz-boosts, em que as simetrias nesse espaço nos gerou as quantidade conservada correspondentes aos transformações no sistema espaço tempo.

Lembremos que a carga conservada (4.24), que é definida por uma integral de

volume e que seu resultado é nulo, e que para essa quantidade conservada teremos:

$$\frac{dK}{dt} = \int d^3x \frac{d}{dt} (t\vec{p} - \vec{x}E) = 0 \quad (5.36)$$

por meio dessa definição, teremos a seguinte constatação, a velocidade de uma partícula relativística em um sistema 4-dimensional para a direção x é:

$$v_x = \frac{p_x}{E} \quad (5.37)$$

e que vale para as demais direções y e z . Se dividirmos as equações pela energia da partícula recaímos nas transformações de Galileu, no qual teremos o centro de massa da partícula no tempo zero. Desta forma poderíamos generalizar que as grandezas são nada mais que a conservação do centro de massa para o tempo $t = 0$ e que sendo conservada, podemos escolher arbitrariamente o valor de t , além de ter γ multiplicado pois temos as relações relativísticas $E = \gamma m$ e $p = \gamma mv$. A afirmação de que a quantidade conservada é o centro de massa não encontra um embasamento na literatura de forma consistente, como será melhor explanado a seguir.

A modelagem matemática das transformações de Lorentz no capítulo 1 foi tratado como rotações hiperbólicas, e que as quantidades conservadas dessas transformações, na condição de ser invariante, é o momento angular relativístico, em que pode-se considerar contraditório, pois as transformações de Lorentz não são rotações, mas vale observar que, como grupo de Lorentz contém rotações, é esperado que o tensor de momento angular faça parte da corrente conservada. Os livros apresentam essa quantidade como sendo a grandeza conservada especificamente. Algumas materiais informais para uma pesquisa científica consultadas na pesquisa se referem a essas quantidades conservadas como a conservação do centro de massa, como fóruns e acervos de conversas arquivadas de email.

Em Suma:

Vimos que o teorema Noether pode nos dar uma quantidade/grandeza física conservada em sistemas físicos invariantes, ou seja, com a presença de uma simetria que estabelece uma relação fundamental com leis de conservação, que agora estão explicadas, ou melhor, elucidadas pelo Teorema de Noether.

Para obtenção do teorema de Noether, foi definido que as transformações são in-

variantes nas coordenadas espaciais, estando por descobrir a transformação no campo pela variação funcional do campo $\delta\phi$. Como resultado, definimos os tensores que carregam essas transformações e as divergências que tomam a forma para cada tipo de transformação, e que a integral de volume desses tensores nos dá a quantidade conservada equivalente a simetria em questão. Podemos colecionar todos os resultados obtidos na tabela abaixo:

Leis de Conservação	Simetria Correspondentes	Tensores	Quantidades Conservadas
Lei de Conservação Massa/Energia	Invariância sob Translação de tempo	T^{00}	$P^0 \equiv E = i \frac{\partial}{\partial t}$
Lei de Conservação Momento Linear	Invariância sob Translação de espaço	T^{0i}	$P^i \equiv \vec{P} = i \vec{\nabla}$
Lei de Conservação Momento Angular	Invariância sob Rotação de espaço	M^{ij0}	$L_{ij} = -i(\vec{r} \times \vec{\nabla})$
Lei de Conservação Centro de Massa	Invariância sob <i>Lorentz-boosts</i>	M^{0i0}	$CM = t\vec{p} - \vec{x}E$

Conclusão

Neste trabalho, de uma forma geral, foi feita uma análise das quantidades conservadas e que a existência delas está intimamente ligadas por uma relação fundamental entre as leis de conservação com as simetrias naturais. Essa relação fundamental foi validada matematicamente por meio da obtenção das grandezas conservadas via do teorema de Noether. As quantidades conservadas de interesse neste trabalho foram as transformações de translações, rotações e *boosts*, que juntas formam o grupo/invariância de Poincaré (translações + transformações de Lorentz), abordado no capítulo 1. No estudo das transformações infinitesimais e invariantes, essas transformações formam grupos que devem obedecer a álgebra de Lie, que nos fornecem os geradores infinitesimais que deixam a transformação invariantes, constatando a relação fundamental das leis de conservação com as simetrias.

No desenvolvimento do trabalho, para se chegar no teorema de Noether, foi introduzido a mecânica clássica do caso discreto e o princípio de Hamilton, juntamente com o cálculo variacional que norteou majoritariamente os cálculos deste trabalho, para em seguida a mecânica do caso contínuo ser introduzida, chegando assim na teoria de campos. O campo mais simples que foi apresentado foi o campo escalar, que é o campo de Klein-Gordon neutro, que descreve partículas bosônicas de spin 0, em que teremos uma equação dinâmica que a descreva e uma energia associada.

Com a calculo variacional e a teoria de campos introduzida, preparou-se caminho para o teorema de Noether, apresentada na sua forma geral. Por meio das características físicas do campo escalar, foi construído o teorema de Noether para as transformações invariantes próprias do campo. Por fim, vimos as quantidades conservadas das transformações de Poincaré para o campo escalar via teorema de Noether, atingindo o objetivo principal do trabalho.

Sobre o teorema de Noether, considerada uma das equações matemáticas mais importantes do século XX por sua conexão que é estabelecida da matemática com a natureza, tem uma das maiores contribuições para as ciências naturais, sobretudo na física. Como todas as teorias física devem obedecer as leis de conservação para validá-las, leis estas como o momento linear, momento angular e energia, as mais usuais e que são consideradas leis exatas (leis ainda não violadas), cada qual com sua respectiva grandeza conservada, o Teorema de Noether estabelece a relação de forma mais fundamentada na matemática do que como era visto de forma axiomático. Desta forma, é possível prever por exemplo, se um sistema físico é conservativo ou não.

Além disso, temos que as grandezas físicas, uma vez que não variam no tempo (logo, conservadas), pelo teorema de Noether são definidas em tensores que gera a quantidade para cada dimensão no espaço. Esses tensores que carregam as transformações e a divergência de fluxo da grandeza conservada atendem a equação da continuidade. O tensor das transformações de translações, obtivemos a energia para a transformação no tempo enquanto que para as demais coordenadas espaciais, o momento linear, ainda que não se demonstra ser explícito, mas que fundamentalmente é previsto como momento linear, por isso leva o nome de tensor energia-momento. O tensor para transformações de rotações (rotações em três dimensões + transformações de Lorentz) é o tensor momento angular para as dimensões espaciais, teremos o momento angular como grandeza conservada, mas para as transformações de Lorentz também é momento angular do caso relativístico?

Na pesquisa bibliográfica que se deu majoritariamente em livros de Teorias de Campos, não se encontrou informações brutas o bastante para ser usadas como embasamento referentes as quantidades conservadas nas transformações de Lorentz-Boosts, uma vez que em muitas das referências que se propunham a abordar quantidades conservadas simétricas, se atinham a expor o momento angular como resultado da invariância em rotações de três dimensões, mas que as quantidades conservadas da invariância de Lorentz eram vagamente explicadas, por vezes estando apenas por nível de menção.

O tensor que gera as seis quantidades conservadas na invariância de Poincaré que pelo nome que se dá de tensor momento angular, nos leva a pre-supor que as três quantidades conservadas para a invariância de Lorentz são os momentos angulares relativísticos, ou ao menos podem ser pensados assim, pois na modelagem matemática das

transformações de Lorentz foram pensados como rotações da dimensão do tempo com uma dimensão espacial. A resposta está em dividir a quantidade por sua própria energia, chegando nas transformações de Galileu, que podem ser interpretados como o centro de massa no tempo igual zero. Desta forma, dizemos que a quantidade conservada é centro de massa conservada. Entretanto, seria necessário uma análise mais profunda, envolvendo o formalismo newtoniano para traçarmos um paralelo com o regime relativístico.

Por fim, atingindo os objetivos propostos por esse trabalho, onde vimos as quantidades conservadas no campo escalar via teorema de Noether, é possível traçar caminhos de continuidade de estudo a partir do campo clássico. Como por exemplo, abranger o estudo das mesmas quantidades conservadas abordadas para os demais campos como o campo eletromagnético, o campo de Dirac, dentre outros. Uma outra linha de estudo é, além de abordar as quantidades conservadas no campo clássico, obter as mesmas quantidades conservadas abrangendo para a teoria quântica de campos, com intuito comparativo entre essas grandezas para traçar uma perspectiva. Também vale a menção a respeito a conservação das quantidades das transformações Lorentz (*boosts*), realizando um estudo mais aprofundado sobre essas grandezas, uma vez que se encontra escassa na literatura.

Bibliografia

- ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *Matemática para Físicos*. São Paulo: LTC, 2007.
- BASSALO, J. M. F.; CATTANI, M. S. D. *Teoria de grupos*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2008. 99-158 p.
- BOGOLÛBOV, N. N. et al. *General principles of quantum field theory*. 1. ed. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1990.
- COXETER, H. S. M. *Regular polytopes*. New York: Courier Corporation, 1973.
- DAS, A. *Lectures on quantum field theory*. Singapura: World Scientific, 2020.
- FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. *Lições de Física*. São Paulo: Bookman, 2008. v. 1.
- FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. *Lições de Física*. São Paulo: Bookman, 2008. v. 2.
- FLEMING, H. Noether theorem in classical field theories and gravitation. *Revista Brasileira de Física*, v. 17, n. 2, p. 236–252, 1987.
- FURTADO, J.; HELAYEL-NETO, J. Teoria de grupos e o papel das simetrias em física. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 43, 2020.
- GELFAND, I. M.; FOMIN, S. V. *calculus of variations*. New York: Donver Publication, 2000.
- GOMES, M. O. C. *Teoria Quântica dos Campos*. 2. ed. São Paulo: Edusp, 2015.
- GREINER, W. et al. *Relativistic quantum mechanics*. 3. ed. Berlim: Springer, 2000.
- GREINER, W.; REINHARDT, J. *Field quantization*. 1. ed. Berlim: Springer, 2013.
- MARION, J. B.; THORNTON, S. T. *Classical dynamics of particles and systems*. 5. ed. Belmont: Brooks/Cole, 2004.
- MARTINS, A. Simetrias e leis de conservação na mecânica clássica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 21, n. 1, 1999.
- MOREIRA, M. A. O conceito de simetria na física. *O CONCEITO DE SIMETRIA NA FÍSICA E NO ENSINO DA FÍSICA*, p. 9, 2019.
- NETO, J. B. Matemática para físicos com aplicações: Tratamentos clássico e quântico. Editora Livraria da Física, São Paulo, v. 2, 2011.

NETO, J. B. *Teoria de Campos e a Natureza: parte quântica*. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.

NEWTON, I. *The Principia: mathematical principles of natural philosophy*. Berkeley: University of California Press, 1999.

NOETHER, E. Invariant variational problems. p. 235 – 257, 1918.

PESKIN, M. E. *An introduction to quantum field theory*. Nova York: perseus Book, 1995.

SCHWARTZ, M. D. *Quantum field theory and the standard model*. New York: Cambridge University Press, 2014.

SYMON, K. R. *Mecânica*. 5. ed. Rio de Janeiro, 1996.

TIPLER, P. A.; LLEWELLYN, R. A. *Física Moderna*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.



Universidade do Estado do Pará Centro de Ciências Sociais e
Educação

Curso de Licenciatura Plena em Ciências Naturais

Centro de Ciências Sociais e Educação

Tv. Djalma Dutra, s/n - Telégrafo, Belém - PA, 66050-540

Belém – PA – 2022